

# THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon - Université  
de Lyon**

**Discipline : Mathématiques**

**Laboratoire de l'UMPA**

**École Doctorale Infomaths**

présentée et soutenue publiquement le 24/09/2012

par Monsieur Pierre-Adelin MERCIER

---

Graphages à type d'isomorphisme prescrit

---

*Directeur de thèse : Damien GABORIAU*

*Après avis de : Madame Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE  
Monsieur Bachir BEKKA*

*Devant la Commission d'examen formée de :*

*Monsieur Aurélien ALVAREZ, Université d'Orléans, Membre*

*Madame Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE, Université d'Orléans, Rapporteur*

*Monsieur Bachir BEKKA, Université de Rennes 1, Rapporteur*

*Monsieur Damien GABORIAU, ENS de Lyon, Directeur*

*Monsieur Julien MELLERAY, Université Lyon 1, Membre*



## REMERCIEMENTS

Qui a dit que la pratique des mathématiques nécessitait une large part d'individualisme ? Si l'on ne peut nier que le processus de maturation – à plus ou moins long terme – des idées possède un caractère fort personnel, les mathématiques n'en restent pas moins un formidable terrain d'échange au delà de toutes frontières, temporelles, spatiales, ce que vous voulez. Un terrain d'entente aussi. Jusqu'à un certain point en mathématiques, on peut dire que des intuitions parfois très diverses *convergent* vers un résultat, ou *s'accordent* sur un résultat, mais jamais ne s'opposent, pour peu que celui-ci soit prouvé vrai par la suite.

Aussi, ce qu'il me reste – en dehors du formel héritage mathématique – de ces quatre années de thèse, outre l'atmosphère invariablement feutrée des bibliothèques visitées de par le monde, ce sont des souvenirs de rencontres, des discussions improbables dans des endroits très divers ; parfois fructueuses pour ma réflexion mathématique, parfois non, mais qui ont toujours au moins apporté l'encouragement nécessaire à poursuivre mon propre cheminement mathématique. Et j'ai toujours éprouvé le même émerveillement à voir s'entretenir avec le plus de sérieux et de considération possible des personnes d'horizons si différents.

Quoiqu'il en soit, si j'ai pu autrefois, dans mes rêveries d'enfant, associer le voyage mathématique avec l'isolement le plus sévère, ces années ont été l'occasion de mesurer l'importance de la communication et du partage dans la recherche. Et la tâche du novice thésard que je fus eût été irréalisable sans l'aide de certaines personnes qu'il convient de mentionner ici.

En tout premier lieu, je tiens particulièrement à remercier Damien Gaboriau mon directeur de thèse qui a pris de son temps pour me transmettre des idées, m'expliquer bien des choses, évidemment pour la plupart au coeur de ce travail de thèse. Je suis heureux d'avoir été formé à la recherche mathématique sous son aile ; son implication et sa passion en ont fait un modèle à bien des égards. Je tiens sincèrement à mentionner Alex Furman ici pour m'avoir permis d'exploiter une de ses idées. Je suis également très reconnaissant envers mes rapporteurs Claire

Anantharaman-Delaroche et Bachir Bekka pour avoir accepté de relire méticuleusement ce manuscrit et d'évaluer ce travail ; il va sans dire que leurs corrections ont amélioré très sensiblement ce texte. Leurs travaux m'ont beaucoup inspiré, je n'aurais pas pu espérer de personnes plus indiquées pour juger de la pertinence de cette thèse. Enfin je remercie Aurélien Alvarez et Julien Melleray à la fois pour les précieuses discussions qui ont émaillé ce parcours de la thèse et bien entendu pour avoir accepté de faire partie de mon jury. À Cyril et Romain, piliers de notre groupe de travail hebdomadaire, je veux dire merci d'avoir pris le temps d'éclairer ma lanterne à l'occasion, en mêlant toujours l'enthousiasme à la précision.

J'ai eu besoin de mes deux premières années de thèse pour mesurer toute l'importance du groupe formé par les doctorants d'un laboratoire (ce qui est certainement encore plus vrai lorsque l'on est en petit nombre) ; on ne vogue pas seul, ce sentiment est inestimable par moments : je remercie donc tous les doctorants de l'UMPA qui ont arpenté les couloirs du quatrième étage pendant ces années. Je vous souhaite à tous une bonne continuation dans les mathématiques ou ailleurs !! J'adresse des remerciements tout particuliers à certains d'entre eux, en premier lieu à Alessandro, qui partagea mon bureau et également en thèse avec Damien, toujours disponible pour discuter, jamais à cours d'idées et à qui cette thèse doit évidemment beaucoup. D'un point de vue personnel également, merci à Daniel, mon co-bureau, d'avoir si bien supporté mes états d'âme ces deux dernières années. Le bureau d'à côté : François, dont la connaissance mathématique m'a été très précieuse, Sylvain et Marielle pour toute leur sympathie à mon égard. Pour nos nombreuses discussions, mathématiques et pas seulement, un grand merci à Sébastien ; je n'oublie pas Rémi avec qui j'ai effectué toute ma scolarité et qui fut un inappréciable confident pendant ma première année de thèse ; enfin Mathieu, Maxime, Michelle, Thomas, et les deux Pierre (j'espère avoir fait le tour) je pense à vous en premier pour l'ambiance et la bonne humeur, ça aide drôlement à travailler ! J'adresse ici un clin d'œil à Ariadna, certes de Grenoble, mais que j'ai eu régulièrement l'occasion – et toujours le plaisir – de croiser... Naturellement, c'est aussi le moment de remercier Virginia et Magalie, Gérard ou Hervé, qui font un travail remarquable pour l'UMPA, et ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Enfin, cette thèse n'aurait jamais vu le jour si mon père ne m'avait pas transmis sa passion des mathématiques, ni ma mère encouragé dans mes choix : je leur dédie donc cette thèse, ainsi qu'à ma famille qui fut d'une importance essentielle.





**Résumé.** — On considère  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence borélienne standard de type  $II_1$  sur un espace de probabilités  $(X, \mu)$ . On étudie dans ce qui suit une certaine propriété d'homogénéité pour un graphage  $\mathcal{G}$  fixé de la relation  $\mathcal{R}$  : on suppose que les feuilles du graphage sont toutes isomorphes à un certain graphe transitif (connexe, infini, localement fini)  $\Gamma$ . Que peut-on dire sur la relation ? Dans ce cas, en considérant une action "*à la Mackey*", on montre qu'il existe  $(\tilde{X}, \tilde{\mu})$  un revêtement standard probabilisé de  $(X, \mu)$ , une action libre p.m.p. du groupe (localement compact, à base dénombrable d'ouverts) des automorphismes du graphe  $G \curvearrowright \tilde{X}$ , et  $\hat{\pi} : \tilde{X} \rtimes G \rightarrow \mathcal{R}$  un *isomorphisme stable* des groupoïdes mesurés associés. On est ainsi amenés à faire le lien entre les propriétés du groupe  $G$  et celles de la relation de départ ; en particulier la propriété  $(T)$ ,  $(H)$  et la moyennabilité "passent" du graphe à la relation et réciproquement.

On déduit aussi de la construction, sous certaines hypothèses supplémentaires, quelques couplages d'équivalence mesurée (ou plus généralement des "*randembeddings*") entre certains sous-groupes des automorphismes de  $\Gamma$  et tout groupe qui *contient orbitalement* la relation  $\mathcal{R}$ . D'autres résultats d'ordre "*géométrico-ergodiques*" lient les symétries du graphe borélien  $\mathcal{G} \simeq X \times \Gamma$  à la relation sous-jacente. Si la feuille générique du graphage est un graphe de Cayley (disons d'un groupe  $\Lambda$ ), alors la projection  $\hat{\pi}$  induit un morphisme surjectif  $\tilde{X} \rtimes \Lambda \rightarrow \mathcal{R}$ . Cependant, il semble difficile de déterminer dans ce cas si la relation de départ  $\mathcal{R}$  provient ou non elle-même d'une action libre de  $\Lambda$ . Naturellement dans le cas particulier des graphes de Cayley, on obtient en plus quelques couplages d'*équivalence orbitale*.

Dans un deuxième chapitre, on aborde le cas particulier de la propriété  $(T)$  relative pour les paires de groupes  $(\Gamma \rtimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe non moyennable de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Cette propriété a d'abord été prouvée par Marc Burger, puis "re-démontrée" plus "*visuellement*" quelques années plus tard dans le cas de  $SL_2(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^2$  par Y. Shalom, en utilisant des découpages du plan. On reprend cette technique dans le cas général du théorème de Burger afin d'obtenir des constantes de Kazhdan explicites pour toute paire  $(\Gamma \rtimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ , mais c'est surtout le caractère aisément implémentable de la méthode sur un logiciel de calcul qui justifie notre démarche.





# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	9
<b>1. Graphages à type d'isomorphisme prescrit</b> .....	17
1.1. Définitions générales .....	17
1.2. Le problème de départ .....	24
1.3. Définition du revêtement .....	26
1.4. Une construction alternative .....	33
1.5. Le cas des graphes de Cayley .....	36
1.6. Du point de vue de l'inclusion orbitale/mesurée .....	41
1.7. La propriété $(T)$ de Kazhdan .....	47
1.8. Questions de moyennabilité .....	50
1.9. La propriété $(H)$ de Haagerup .....	52
1.10. Une extension de l'équivalence mesurée .....	56
1.11. Appendice .....	61
1.12. Questions annexes .....	64
<b>2. Constantes de Kazhdan explicites pour <math>\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2</math></b> .....	67
Introduction .....	67
2.1. Énoncés et préliminaires .....	68
2.2. Démonstration "à la Shalom" du théorème de M. Burger .....	73
2.3. Calcul des constantes .....	77
<b>Figures</b> .....	83
<b>Détails du programme</b> .....	89
<b>Bibliographie</b> .....	91



# INTRODUCTION

Soit  $(X, \mu)$  un espace borélien standard probabilisé (sans atomes), et  $\Gamma$  un groupe dénombrable infini qui agit sur  $X$  par automorphismes boréliens en préservant la mesure de probabilité (p.m.p. en abrégé). Cette action définit à son tour une relation d'équivalence sur  $X$  dont les classes sont les  $\Gamma$ -orbites. L'ensemble

$$\{(x, \gamma \cdot x) \in X \times X | x \in X, \gamma \in \Gamma\}$$

est le "graphe" de la relation d'équivalence. On confond généralement la relation d'équivalence avec son graphe, vu comme une sous-partie borélienne dans  $X \times X$ . En fait, par un théorème de Feldman et Moore (voir [FM77], Theorem 1), toute relation d'équivalence "*abstraite*" (borélienne, à classes dénombrables) est obtenue à partir de l'action d'un certain groupe dénombrable. En *théorie de l'équivalence orbitale (mesurée)*, c'est ce nouvel objet borélien qui est au centre de l'attention : En quelque sorte, les groupes considérés n'existent que par les relations d'équivalence que leurs actions produisent. La bonne notion d'isomorphisme entre deux actions de groupes est alors un isomorphisme entre les relations d'équivalence induites ; on entend par là un isomorphisme des espaces mesurés qui préserve les orbites, encore appelée une *équivalence orbitale* (notée *OE* pour "Orbit Equivalence" en abrégé). On définit ainsi réellement une relation d'équivalence parmi l'ensemble des groupes dénombrables. En outre, il est implicitement entendu que l'on travaille dans un cadre mesuré, où les ensembles de mesure nulle "ne comptent pas". Un très grand nombre de questions d'équivalence orbitale mesurée ont leur pendant *borélien*, pour lequel il est souvent beaucoup plus difficile de répondre.

La problématique principale de la théorie est de mettre en avant certains "*phénomènes de rigidité*", c'est à dire quelles sont les propriétés du groupe (ou plus précisément de l'action du groupe) qui "passent" à la relation d'équivalence. Notamment, connaît-on des groupes qui possèdent des actions orbitalement équivalentes entre-elles ? Pour un groupe donné, combien existe-t-il d'actions à *OE* près ?

Connaît-on des groupes qui ne se "parlent pas" du point de vue de l'équivalence orbitale ?

Cette branche de la théorie ergodique s'est développée à partir de la fin des années 1950 et les premiers résultats de H. Dye (voir [Dye59] et [Dye63]), qui montre que toutes les actions ergodiques de  $\mathbb{Z}$  produisent une unique relation d'équivalence à isomorphisme près. Débute alors une longue série de travaux sur l'équivalence orbitale étroitement liés avec la théorie des algèbres d'opérateurs, elle-même initiée une vingtaine d'années plus tôt par Murray et Von Neumann (cf. [MN36]). Cette série de travaux culmine en 1980 avec le théorème suivant :

**Théorème (Ornstein-Weiss, [OW80]).** — *Toutes les actions ergodiques de groupes moyennables préservant une mesure de probabilité non-atomique sur un espace boélien standard sont orbitalement équivalentes entre elles.*

Toutefois, si la famille des groupes moyennables forme une unique classe pour l'équivalence orbitale, il en va tout autrement pour les groupes non-moyennables. A la même époque R.J. Zimmer, en étudiant la superrigidité des cocycles dans son article [Zim80], pose les bases de ce que l'on peut véritablement appeler la *théorie mesurée des groupes* en établissant un lien fort entre la théorie (des réseaux) des groupes de Lie et les questions d'équivalence orbitale que nous venons juste de citer. Il obtient en particulier le corollaire suivant :

**Théorème (Zimmer, [Zim80], Corollary 4.6).** — *Pour tous  $m, n \geq 2$ , les actions  $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  et  $SL_m(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$  sont OE ssi  $n = m$ .*

Ce résultat est une prémisse aux nombreuses découvertes de la théorie mesurée des groupes dans le monde *non-moyennable*. A titre d'illustration, citons en particulier le théorème suivant concernant les groupes libres non-abéliens :

**Théorème (Gaboriau-Popa, cf. [GP05]).** — *Le groupe libre à  $n > 1$  générateurs possède un continuum d'actions (libres) p.m.p. non-orbitalement équivalentes deux à deux.*

Un résultat qui sera étendu deux ans plus tard à tous les groupes non-moyennables par I. Epstein (voir [Eps07] et [Ioa11]).

C'est à la toute fin des années 1970 qu'émerge l'idée (attribuée à A. Connes) d'étudier les relations d'équivalence (qui sont, sauf précision, toujours considérées à classes dénombrables) avec une information supplémentaire sous la forme d'une structure simpliciale sur chaque orbite. Dans le cas de la dimension 1, et c'est le cadre de travail de cette thèse, on parle de relations d'équivalence *graphées*. Cette idée de mêler des considérations géométriques à l'étude des relations mesurées discrètes pose les bases de ce qu'on pourrait appeler la *combinatoire mesurée*, tant l'analogie est forte avec l'étude des groupes par générateurs et relations.

En pratique, il y a plusieurs façons équivalentes de définir mesurablement une structure de graphe sur les orbites de la relation. Si on se souvient qu'une relation d'équivalence est un groupoïde particulier, alors tout système générateur au plus dénombrable  $(\varphi_i)_i$  de la relation  $\mathcal{R}$  induit en effet une structure de graphe sur chaque orbite. Les éléments  $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$  sont des bijections entre deux parties boréliennes de  $X$ , dont le graphe est inclus dans (le graphe de) la relation, autrement appelés *isomorphismes (intérieurs) partiels de la relation*. Si un tel  $\varphi$  est défini (presque) partout, on parle d'*isomorphisme (intérieur) global*. On relie par une arête les éléments  $x$  et  $\varphi_i(x)$ , pour tout  $i$  et pour tout  $x$ . Par ailleurs, il est souvent pratique de considérer le *champ de graphes* naturellement associé, qui à tout  $x \in X$  associe le graphe pointé (en  $x$ ) de son orbite. La donnée d'un graphage est alors équivalente à la donnée d'un champ de graphes  $\mathcal{R}$ -équivariant (*i.e.* deux points  $\mathcal{R}$ -équivalents sont envoyés sur le même graphe mais le point marqué a changé). Remarquons par ailleurs que comme la famille  $(\varphi_i)$  est génératrice, les graphes induits sur les orbites sont connexes. En oubliant l'orientation implicite des arêtes dans la construction ci-dessus, on obtient une autre manière de définir un graphage : il s'agit d'une partie symétrique (un ensemble d'arêtes)  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$  qui n'intersecte pas la diagonale. On pourra parler de graphage *non-orienté* dans ce cas. Ces deux définitions sont équivalentes (si on ne tient pas compte de la présence éventuelle de boucles et d'arêtes doubles dans le graphage  $(\varphi_i)_i$ ), c'est une conséquence du théorème de Lusin-Novikov (voir aussi [KM04], Section 17). Cependant, c'est plutôt avec cette seconde définition que S. Adams, en se déclarant fidèle à l'idée d'A. Connes, obtient très certainement les tout premiers résultats de combinatoire mesurée. Il montre dans [Ada88b] un résultat d'indécomposabilité pour les relations p.m.p. qui admettent un arborage (*i.e.* dont les orbites graphées sont presque sûrement des arbres), puis obtient ensuite dans [Ada90], que tout arborage d'une relation p.m.p. moyennable possède presque sûrement au plus deux bouts.

Un peu plus tard, E. Ghys prouve dans le cadre des feuilletages mesurés (voir [Ghy95] mais aussi [Pau99], Théorème 3.1 pour un énoncé strictement en termes de relations d'équivalence), que les orbites d'une relation d'équivalence graphée p.m.p. possèdent presque sûrement 0, 1 ou 2 ou un Cantor de bouts. En outre, il obtient un analogue pour les relations (graphées) du théorème de Stallings sur les groupes possédant une infinité de bouts. Peu de temps après, c'est dans son article fondateur sur le coût que D. Gaboriau obtient le corollaire suivant :

**Proposition** ([Gab00], Corollaire IV.24). — *Si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation d'équivalence p.m.p. ergodique et graphée, alors :*

- (1) *Si  $\mathcal{G}$  a presque sûrement deux bouts, alors  $\mathcal{R}$  est hyperfinie.*
- (2) *Si  $\mathcal{G}$  a presque sûrement au moins trois bouts, alors  $\mathcal{R}$  n'est pas hyperfinie.*

La contribution fondamentale de cet article a été de montrer que, pour toute relation p.m.p., les graphages qui réalisent le coût de la relation<sup>(1)</sup> sont les arborages. Un corollaire immédiat est que les groupes libres sont à prix fixe (*i.e.* le coût de toute action libre est le même), et surtout que le coût est un invariant non-trivial d'équivalence orbitale. Cependant, le théorème qui a certainement le plus motivé nos réflexions sur les graphages est une forme de réciproque sur le coût des groupes libres :

**Théorème (G. Hjorth, cf. [Hjo06]).** — *Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. arborée, de coût  $C_\mu(\mathcal{R}) = n + \varepsilon$ , ( $\varepsilon < 1$ ). Alors il existe un arborage  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{R}$  constitué de  $n$  isomorphismes (intérieurs) globaux de  $\mathcal{R}$  et d'un isomorphisme (intérieur) partiel.*

En particulier, si  $\mathcal{R}$  est arborable de coût entier  $n$ , alors elle est produite par une action libre de  $\mathbb{F}_n$  (le groupe libre à  $n$  générateurs). La preuve donnée de ce théorème par Kechris-Miller dans [KM04] est essentiellement "*combinatoire*" : à partir d'un arborage donné de la relation, on construit un isomorphisme *global* de la relation par des glissements d'arêtes successifs ; des méthodes assez similaires à celles employées pour l'étude des groupes donnés par générateurs et relations.

Il y a parfois des cas pratiques où la relation considérée vient naturellement avec un graphage *non-orienté*, en particulier lorsque l'on considère des relations d'équivalence sur des espaces quotients. Ce type de relations graphées intervient naturellement dans le cadre de la percolation. En particulier, si  $\Gamma = (\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)})$  est un graphe transitif et  $Aut(\Gamma) \curvearrowright (X, \mu)$  une action libre sur un espace de probabilités standard, on peut considérer le graphe (borélien) quotient  $H \backslash (X \times \Gamma)$  pour l'action diagonale sur  $X \times \Gamma$  d'un certain sous-groupe fermé  $H < Aut(\Gamma)$  qui agit transitivement sur les sommets. La relation sous-jacente obtenue sur le quotient  $H \backslash (X \times \Gamma^{(0)})$  (qui est un borélien standard) est naturellement graphée, et les orbites sont isomorphes (en tant que graphes) à  $\Gamma$ . De même, si  $\pi : X \rightarrow \{0, 1\}^{\Gamma^{(1)}}$  est une application  $H$ -équivariante, la relation "cluster" qu'elle définit sur l'espace quotient  $H \backslash (X \times \Gamma^{(0)})$  est munie canoniquement d'un graphage *non-orienté* (voir [Gab05], section 2.1, section 2.2).

Prenons l'exemple fondamental suivant : toute action libre de  $\mathbb{Z} = \langle T \rangle$  engendre naturellement une *forêt borélienne de droites* (*i.e.* un graphage de valence uniforme égale à 2) en posant une arête entre  $x$  et  $T(x)$  pour tout  $x$ . Cependant, toute forêt borélienne n'est pas directement obtenue à partir d'une action de  $\mathbb{Z}$  : il n'existe pas *a priori* d'orientation "cohérente" des arêtes entre elles. Cette remarque est illustrée dans le livre [KM04], Remark 6.8 (où elle est attribuée à S. Adams), et il en est également question dans l'article [Gab05], Example 2.2. Ces constatations ont fait naître la réflexion suivante : si l'on dispose d'un arborage

---

1. Le coût d'un graphage est la moitié de sa valence moyenne, le coût d'une relation est l'infimum des coûts des graphages qui l'engendrent.

de valence constante (et paire) de la relation  $\mathcal{R}$ , que manque t-il pour obtenir une action libre du groupe libre (en lien avec le graphage) ?

C'est donc très probablement au cours des années 2004-05, à la suite du théorème de Hjorth, et accompagnant les remarques de l'article ([**Gab05**], Example 2.2, ou section 2.1) évoquées ci-dessus, que A. Furman et D. Gaboriau se sont posés la question de l'orientabilité des graphages, le but étant de préciser le lien entre certains types de relations graphées et les actions (potentiellement libres) dont elles proviendraient. Le terme d'orientabilité demande à être précisé : il ne s'agit pas de choisir mesurablement une orientation sur chaque orbite à l'aide de sections partielles du graphage  $\mathcal{G}$  données par le théorème de Lusin-Novikov, mais de définir des isomorphismes *globaux* de la relation dont le graphe serait une partie de  $\mathcal{G}$ , et faire ainsi un "premier pas" vers une *action de groupe* qui définirait la relation. L'exemple de certaines forêts boréliennes de droites cité précédemment montre que même dans le cas le plus simple, ce n'est pas toujours possible. C'est le problème des "*Borel matchings*" évoqué sans doute en premier par Laczkovich dans [**Lac88**], et repris par C. Conley et A. Kechris dans [**CK10**] (voir aussi [**LN09**]).

Dans un cas particulier, considérons l'exemple suivant : si  $\alpha$  est une action libre d'un groupe de type fini  $G$  sur le borélien standard  $X$ , alors la famille  $(\alpha(s))_{s \in S}$  pour  $S \subset G$  une partie finie génératrice, est un graphage *orienté* et *marqué/colorié* (entendu *sur les arêtes* dans toute la suite) de la relation engendrée par  $G$ . Chaque fibre du champ de graphes correspondant (qui est un graphe pointé, colorié) est isomorphe (en tant que graphe pointé et colorié) au graphe de Cayley du groupe relativement à la partie  $S$  : en d'autres termes, le choix d'une famille génératrice pour le groupe nous donne un champ de graphes *coloriés* qui est  $\mathcal{R}$ -équivariant au sens précédemment évoqué. Réciproquement, toute relation munie d'un tel graphage orienté et colorié, dont les composantes connexes sont des graphes de Cayley pour un certain groupe dénombrable, provient d'une action libre de ce groupe. Oublions désormais l'orientation et le coloriage des arêtes ; on suppose seulement que les feuilles du graphage sont isomorphes à un certain graphe de Cayley en tant que graphes *pointés* ; comment retrouver des informations sur l'action de départ ?

Dans le cas général, on suppose que chaque  $\mathcal{R}$ -orbite pointée vient avec une structure de graphe qui est isomorphe à un certain graphe transitif pointé  $(\Gamma, v_0)$ . Il semble approprié de définir alors le terme de graphage  $\Gamma$ -homogène. L'idée originale de A. Furman et D. Gaboriau est d'"*augmenter*" l'espace (ce que l'on peut penser comme l'opération inverse de la réduction  $X \rightarrow H \backslash (X \times \Gamma^{(0)})$  du paragraphe précédent) afin d'y *induire* une action libre du groupe des automorphismes du graphe "proche" de la relation de départ en un sens à définir. Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème (th. 1.3.2).** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée. On suppose que le graphage  $\mathcal{G}$  est  $\Gamma$ -homogène pour un certain graphe (connexe, transitif, localement fini)  $\Gamma$ . On note  $K$  le stabilisateur compact (dans le groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$ ) d'un sommet muni de sa mesure de Haar, et  $\mathcal{K}$  la relation transitive sur  $K$  (donc  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$  désigne ci-dessous la relation "produit" sur  $X \times K$ ).

Alors il existe  $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \text{Aut}(\Gamma))$  un espace borélien standard probabilisé avec une action libre p.m.p. de  $\text{Aut}(\Gamma)$ , et un isomorphisme  $(K \times K)$ -équivariant entre les groupoïdes mesurés  $\text{Aut}(\Gamma) \ltimes \tilde{X}$  et  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$ .

La construction d'une telle action est un cas particulier des actions dites "à la Mackey" (ici dans un contexte mesuré, cf. [Kec10], Section 21.(C)), avec cette différence que l'on veut en plus s'assurer que la mesure  $\tilde{\mu}$  sur le "sur"-espace est bien  $\text{Aut}(\Gamma)$ -invariante. Notons aussi que le groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$  qui agit librement au dessus de la relation  $\mathcal{R}$  de départ est moralement plus "gros" que les orbites de  $\mathcal{R}$  (le stabilisateur d'un sommet de  $\Gamma$  est compact, donc fini ou bien non-dénombrable).

Dans le cas plus particulier d'un graphage  $\Gamma$ -homogène, où  $\Gamma$  est un graphe de Cayley (lorsqu'un certain réseau a été identifié dans le groupe des automorphismes de  $\Gamma$ ), on obtient une deuxième version du théorème 1.3.2, où il est montré qu'une telle relation graphée est l'image par un morphisme surjectif d'une relation p.m.p. induite par une action libre du réseau en question ; plus précisément :

**Théorème (th. 1.5.1).** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée. On suppose que  $\mathcal{G}$  est  $\text{Cay}(\Lambda, S)$ -homogène pour un certain groupe  $\Lambda$  et une famille génératrice finie  $S$ . Alors il existe un espace borélien standard probabilisé  $(\tilde{X}, \tilde{\mu})$ , et  $\beta$  une action libre p.m.p. de  $G = \text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda, S))$ , telle que la restriction de l'isomorphisme du théorème 1.3.2 au groupoïde mesuré  $\Lambda \ltimes \tilde{X}$  est une isométrie locale (i.e. induit un isomorphisme de graphes en restriction à chaque  $\Lambda$ -orbite [graphée par la famille  $\beta(S)$ ]).

On aborde à la suite de ces théorèmes des généralisations de la notion d'équivalence orbitale. Historiquement, c'est en étudiant les réseaux (dans des groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts), que M. Gromov a introduit la notion d'*Équivalence Mesurée* entre deux groupes dénombrables (*ME* pour "Measure Equivalence" en abrégé), qui est alors apparue naturellement comme un pendant mesurable de la quasi-isométrie en théorie géométrique des groupes, et grâce à laquelle on peut définir une relation d'équivalence entre les groupes dénombrables, et plus généralement entre les groupes localement compacts, unimodulaires et à base dénombrable d'ouverts. A nouveau, l'affaiblissement de cette notion a donné naissance plus récemment à la définition d'*inclusion mesurée* entre groupes, probablement plus connue sous le nom de "*randembedding*" (cf. [Mon06], Section 5), qui n'est pas une relation d'équivalence entre groupes cette fois mais un (quasi-) ordre partiel. La précédente étude des *symétries* d'un graphage particulier pour



une action libre d'un groupe donné permet d'en déduire quelques couplages en corollaire.

Les propriétés des graphages peuvent aussi être exploitées pour trouver des sous-relations. Ce sont notamment ces considérations d'ordre "géométrico-ergodique" (associées à des techniques de percolation) qui ont mené à la résolution du problème de Von Neumann "mesuré" :

**Théorème (Gaboriau-Lyons, [GL09]).** — *Pour tout groupe  $\Gamma$  non-moyennable, la relation Bernoulli  $(\mathcal{R}_\Gamma, [0, 1]^\Gamma, \text{Leb}^{\otimes \Gamma})$  contient une sous-relation produite par une action libre de  $\mathbb{F}_2$ .*

D'une manière générale, une autre généralisation naturelle (à la vue de ce théorème) de l'*OE* est la notion d'*inclusion orbitale* entre deux groupes. Le théorème 1.3.2 a aussi quelques conséquences dans ce cadre. Cependant, on a généralement peu d'informations sur les sous-relations d'une relation d'équivalence. En particulier, on peut trouver à la fin de ce même article [GL09] la question suivante : Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  une relation ergodique p.m.p. non moyennable ; existe-t-il toujours une sous-relation arborable non-moyennable ?

Enfin, on examine les liens étroits entre un graphage homogène et la relation d'équivalence sous-jacente, à la lumière des trois propriétés suivantes que sont la propriété (T) de Kazhdan, la moyennabilité, et la propriété (H) de Haagerup. On est amené à définir la propriété (T) pour un graphe transitif et la propriété (H) pour un graphe transitif unimodulaire. Ces définitions sont introduites "naïvement" comme les propriétés correspondantes du groupe (topologique, localement compact à base dénombrable d'ouverts) des automorphismes du graphe. Ainsi définies, ces propriétés se transmettent directement du graphe à la relation d'équivalence, par exemple :

**Corollaire (cor. 1.7.1).** — *Si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée  $\Gamma$ -homogène alors  $\mathcal{R}$  a la propriété (T) si et seulement si  $\Gamma$  a la propriété (T).*

Ou bien encore la proposition similaire pour la propriété (H) :

**Corollaire (cor. 1.9.1).** — *Si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation graphée p.m.p.  $\Gamma$ -homogène, alors  $\Gamma$  a la propriété (H) si et seulement si  $\mathcal{R}$  a la propriété (H).*

Ces considérations nous amènent à définir la notion de graphes transitifs *Mesurablement Équivalents* comme l'équivalence mesurée entre les groupes d'automorphismes correspondants. En copiant la démonstration du Théorème 3 de [FM77], on obtient la caractérisation suivante :

**Proposition (prop. 1.10.1).** — *Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux graphes transitifs (infinis, connexes, localement finis) unimodulaires. Alors on a équivalence entre :*

- (i)  $Aut(\Gamma_1) \overset{ME}{\sim} Aut(\Gamma_2)$ .
- (ii) *Il existe une relation à classes dénombrables p.m.p. ergodique graphée  $(\mathcal{R}_1, X_1, \mu_1, \mathcal{G}_1)$  qui est  $\Gamma_1$ -homogène, une relation à classes dénombrables p.m.p. ergodique graphée  $(\mathcal{R}_2, X_2, \mu_2, \mathcal{G}_2)$  qui est  $\Gamma_2$ -homogène et une SOE entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .*

# CHAPITRE 1

## GRAPHAGES À TYPE D'ISOMORPHISME PRESCRIT

### 1.1. Définitions générales

**1.1.1. Rappels.** — Un espace topologique séparable  $X$  est un espace *polonais* si il existe une distance complète  $d$  sur  $X$  compatible avec la topologie. Un espace mesurable est la donnée d'une paire  $(X, \mathcal{S})$  où  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{S}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $X$ . Les éléments de  $\mathcal{S}$  sont les *ensembles mesurables*. Soit  $(X, \mathcal{S}), (Y, \mathcal{A})$  deux espaces mesurables, on dira que  $f : X \rightarrow Y$  est *mesurable* si pour tout  $A \in \mathcal{A}, f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ . Une application  $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{A})$  est un *isomorphisme (mesurable)* si  $f$  est bijective et  $f, f^{-1}$  sont mesurables.

Un espace mesurable  $(X, \mathcal{S})$  est un *espace borélien standard* si  $(X, \mathcal{S})$  est isomorphe à un espace polonais  $(Y, \mathcal{B}(Y))$  muni de la tribu des boréliens (*i.e.* la tribu engendrée par les parties ouvertes de  $Y$ ). Une application entre deux espaces topologiques  $f : X \rightarrow Y$  sera dite *borélienne* si elle est mesurable pour les tribus boréliennes de  $X$  et  $Y$ .

Dans toute la suite,  $X$  désignera un espace borélien standard et  $\mu$  une mesure de probabilité sans atomes sur  $X$ . Un tel espace  $X$  est toujours isomorphe à  $([0, 1], \lambda)$  (où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ ), au sens où il existe un isomorphisme borélien de  $(X, \mu)$  vers  $([0, 1], \lambda)$  qui envoie la mesure  $\mu$  sur  $\lambda$ . On en trouvera une démonstration dans le livre de A. Kechris (voir [Kec95], Theorem 15.6). Dans le contexte mesuré, on s'autorise à négliger les ensembles de mesure nulle. Ainsi, une fonction de  $(X, \mu)$  vers  $(Y, \mathcal{A})$  un certain espace mesurable, sera dite  $\mu$ -mesurable si l'image réciproque d'un ensemble mesurable est  $\mu$ -mesurable<sup>(1)</sup>. Lorsque  $(Y, \mathcal{A})$  est un borélien standard (et on ne considérera que de tels espaces dans la suite), cette dernière condition est encore équivalente à coïncider  $\mu$ -presque partout avec une application mesurable.

---

1. L'ensemble des parties  $\mu$ -mesurables de  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  est formé des parties de la forme  $A \cup N$ , avec  $A \in \mathcal{S}$  et  $N$  *négligeable*, *i.e.* contenu dans un mesurable de mesure nulle.

Le groupe  $\text{Aut}(X)$  désignera l'ensemble des bijections (bi-)boréliennes de  $X$  vers  $X$ ; on précisera encore  $\text{Aut}(X, \mu)$  pour le groupe des automorphismes boréliens de  $X$  qui préservent la mesure  $\mu$ , et deux tels automorphismes sont identifiés lorsqu'ils coïncident  $\mu$ -presque partout. On appelle *groupe topologique* un groupe muni d'une topologie compatible avec la multiplication et l'inverse, *i.e.* pour laquelle l'application  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  est continue. Ainsi, un *groupe polonais* est un groupe topologique, dont la topologie est séparable et métrisable pour une distance complète. Enfin, pour  $G$  un groupe topologique, une application borélienne  $\alpha : G \times X \rightarrow X$ , définit une *action par automorphismes boréliens* lorsque pour tout  $g \in G$ ,  $\alpha_g : x \mapsto \alpha(g, x)$  est un automorphisme (borélien) de  $X$ , et  $g \mapsto \alpha_g$  est un morphisme de groupes. On dira encore que  $\alpha$  est une action qui *préserve la mesure de probabilité*  $\mu$  (noté en abrégé *p.m.p.*) si pour tout  $g \in G$ , on a  $(\alpha_g)_* \mu = \mu$ . Une telle action est dite *libre* (resp. *essentiellement libre*) si pour tout  $x \in X$  (resp. pour presque tout  $x \in X$ ), le stabilisateur de  $x$  dans  $G$  est réduit à l'élément neutre.

**Définition 1.1.1.** — *Une relation d'équivalence borélienne sur  $X$  est une partie borélienne  $\mathcal{R} \subset X \times X$  (pour la  $\sigma$ -algèbre produit) telle que :*

- $\forall x \in X, (x, x) \in \mathcal{R}$ . (*Réflexivité*)
- $\forall x, y \in X, (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ . (*Symétrie*)
- $\forall x, y, z \in X, (x, y), (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ . (*Transitivité*)

**Exemple 1.1.1.** — *L'action de  $\mathbb{Z}$  sur le cercle  $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  par rotation (d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé) préserve la mesure de Lebesgue et induit une relation d'équivalence "être dans la même  $\mathbb{Z}$ -orbite".*

On désigne par  $\pi_1, \pi_2$  les deux projections canoniques (comme "1ère" et "2ème" coordonnée) ;

$$\left( \begin{array}{ccc} \pi_1 : & \mathcal{R} & \rightarrow X \\ & (x, y) & \mapsto x \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} \pi_2 : & \mathcal{R} & \rightarrow X \\ & (x, y) & \mapsto y \end{array} \right)$$

**Définition 1.1.2.** — *On dira que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence à classes dénombrables si les fibres de  $\pi_1$  (ou de façon équivalente les fibres de  $\pi_2$ ) sont au plus dénombrables.*

Sous cette hypothèse de dénombrabilité des classes, on peut munir la relation d'une mesure borélienne (infinie, mais surtout  $\sigma$ -finie) de la façon suivante, où le cardinal d'un ensemble  $\mathcal{E}$  est noté  $|\mathcal{E}|$  (convention que nous adopterons tout au

long de ce texte). Soit  $A$  un borélien de  $\mathcal{R}$  :

$$(1) \quad \nu_1(A) := \int_X |\pi_1^{-1}(x) \cap A| \, d\mu(x).$$

Ou encore à l'aide de la projection  $\pi_2$  :

$$\nu_2(A) := \int_X |\pi_2^{-1}(y) \cap A| \, d\mu(y).$$

**Définition 1.1.3.** — On dira que  $\mathcal{R}$  préserve la mesure de probabilité  $\mu$  sur  $X$  si  $\nu_1 = \nu_2$ .

On dira que  $\mathcal{R}$  préserve la classe de la mesure  $\mu$  si pour tout borélien  $A$  de mesure nulle, l'ensemble saturé<sup>(2)</sup>  $\mathcal{R} \cdot A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(A)$  est encore de mesure nulle. Parfois, on dit aussi que  $\mu$  est *quasi-préservée*.

On dira qu'une relation d'équivalence standard mesurée est *ergodique* si tout borélien saturé est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle. Notons encore que cette notion s'étend à des mesures infinies (ne dépend que de la classe de la mesure considérée) et que l'on ne suppose pas que les classes sont dénombrables.

Pour deux éléments  $x, y$  qui sont  $\mathcal{R}$ -équivalents, on écrira indifféremment  $(x, y) \in \mathcal{R}$  ou bien  $x \sim y$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés. On note encore  $\mathcal{R}[x]$  (ou  $\mathcal{R} \cdot x$ ) la  $\mathcal{R}$ -orbite de  $x$ .

**Définition 1.1.4.** — Pour toute partie borélienne  $A \subset X$ , on note  $\mathcal{R}|_A$  la relation d'équivalence induite sur  $A$ , c'est à dire

$$\mathcal{R}|_A = \{(x, y) \in \mathcal{R} | x \in A, y \in A\}.$$

On a vu que la relation  $\mathcal{R}$  fibre naturellement sur  $X$ . De façon générale, on appellera *fibré standard* (sur  $X$ ) tout espace borélien standard muni d'une projection borélienne à fibres dénombrables sur  $X$ . Lorsque l'on a deux fibrés standards  $(U, \pi_U), (V, \pi_V)$  sur  $X$ , on peut former leur produit fibré de la façon suivante :

$$(U, \pi_U) * (V, \pi_V) := \{(u, v) \in U \times V | \pi_U(u) = \pi_V(v)\}.$$

Ce dernier espace est un espace fibré standard pour la projection évidente.

**Exemple 1.1.2.** — Pour  $(U, \pi_U) = (\mathcal{R}, \pi_2)$  et  $(V, \pi_V) = (\mathcal{R}, \pi_1)$  on obtient l'espace

$$\mathcal{R}^{(2)} := \{(x, y, z) \in X \times X \times X | x \sim y \sim z\}, \text{ fibré par } (x, y, z) \mapsto y.$$

---

2. Le saturé d'un borélien est toujours borélien lorsque  $\mathcal{R}$  est à classes dénombrables ; autrement c'est un ensemble *analytique*, donc en particulier  $\mu$ -mesurable (cf. [Kec95], Theorem 21.10).

Lorsque  $\mathcal{R}$  (disons à classes dénombrables) préserve la mesure  $\mu$ , ce dernier espace est muni d'une mesure borélienne ( $\sigma$ -finie) naturelle donnée par

$$\nu^{(2)}(A) = \int_X |\pi^{-1}(x) \cap A| d\mu(x)$$

pour tout borélien  $A \subset \mathcal{R}^{(2)}$  (et  $\pi$  étant indifféremment la projection sur l'une des trois coordonnées).

Par ailleurs,  $\mathcal{R}$  possède une structure naturelle de *groupoïde borélien* donnée par l'application borélienne

$$\left( \begin{array}{ccc} (\mathcal{R}, \pi_2) * (\mathcal{R}, \pi_1) & \rightarrow & \mathcal{R} \\ ((x, y), (y, z)) & \mapsto & (x, z) \end{array} \right)$$

Un *homomorphisme (borélien)* entre deux relations d'équivalence boréliennes (non supposées à classes dénombrables)  $(\mathcal{R}_1, X_1)$  et  $(\mathcal{R}_2, X_2)$  est une application borélienne  $f : X_1 \rightarrow X_2$  telle que

$$(x, y) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \mathcal{R}_2.$$

Si  $(R, X, \mu)$  est une relation d'équivalence borélienne (non nécessairement à classes dénombrables) sur un espace probabilisé  $(X, \mu)$ , et  $\nu$  une mesure de Haar relativement à  $\mu$  pour  $\mathcal{R}$ ,<sup>(3)</sup> alors on dira que  $(\mathcal{R}, \nu)$  est une *relation d'équivalence mesurée*. Un isomorphisme  $\phi$  entre deux relations d'équivalence mesurées  $(\mathcal{R}_1, \nu_1, X_1, \mu_1)$  et  $(\mathcal{R}_2, \nu_2, X_2, \mu_2)$  est un isomorphisme borélien entre  $X_1$  et  $X_2$  tel que

$$(\phi \times \phi)_*(\nu_1) = \nu_2.$$

On parlera dans ce cas d'*équivalence orbitale*, et on notera  $\mathcal{R}_1 \stackrel{OE}{\sim} \mathcal{R}_2$  (voir aussi la définition 1.6.3).

Soit  $(U, \pi_U)$  un espace fibré standard sur  $X$ . Une  $\mathcal{R}$ -action (à gauche) est une application borélienne

$$\left( \begin{array}{ccc} (\mathcal{R}, \pi_2) * (U, \pi_U) & \rightarrow & U \\ ((x, y), u) & \mapsto & (x, y).u \end{array} \right)$$

qui vérifie les identités  $(x, y).[(y, z).u] = (x, z).u$  et  $(z, z).u = u$  partout où elles ont un sens. Un tel espace  $U$  est alors appelé un  $\mathcal{R}$ -espace fibré standard (sur  $X$ ). Comme pour l'action d'un groupe, on définit l'orbite de  $u \in U$  comme l'ensemble  $\mathcal{R}.u := \{(x, y).u \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ .

---

3. Dans notre cadre simple, toutes nos relations d'équivalence préservent une mesure de probabilité; on demande donc à la fois l'invariance de  $\nu$  par le flip  $(x, y) \mapsto (y, x)$ , et la condition suivante :  $(\pi_1)_*\nu = \mu$  et si on écrit  $\nu = \int_X \nu^x d\mu(x)$  la désintégration de  $\nu$  par rapport à la projection sur la première coordonnée, alors  $\nu^x = \nu^y$  pour  $\nu$ -presque tous  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Dans le cas discret, c'est la mesure que nous avons donnée en (1).

**Remarque 1.1.1.** — Lorsque  $G \curvearrowright (X, \mu)$  est une action libre p.m.p., on a  $G \times X \simeq \mathcal{R}(G \curvearrowright X)$  (par l'isomorphisme borélien  $(x, g) \mapsto (x, g \cdot x)$ ) et on écrira parfois  $G \ltimes X$  pour le groupoïde correspondant, si on veut souligner la liberté de l'action.

Toutes ces notions d'espaces fibrés ont été introduites par A. Connes dans [Con79]. Dans toute la suite,  $\mathcal{R}$  désignera toujours une relation borélienne standard à classes dénombrables sur  $X$  qui préserve la mesure de probabilité  $\mu$ .

Un *graphe combinatoire* (non orienté)  $\Gamma$  est la donnée d'un ensemble de sommets  $\Gamma^{(0)}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\Gamma^{(1)}$ , munis des applications  $o : \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(0)}$  ( $o$  pour "origine"),  $b : \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(0)}$  ( $b$  pour "but"), et de l'involution  $i : \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(1)}$  qui vérifient  $o(i(e)) = b(e)$ , pour tout élément  $e \in \Gamma^{(1)}$ . S'il est besoin de préciser les ensembles d'arêtes et de sommets, on notera  $\Gamma = (\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)})$ . Un graphe est *localement fini* si tout sommet n'a qu'un nombre fini de voisins. On supposera dans ce qui suit que les graphes considérés n'ont pas de boucles ni d'arêtes multiples. En particulier, on a  $\Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(0)} \times \Gamma^{(0)}$ . Une *orientation* sur un tel graphe est une partie  $A \subset \Gamma^{(1)}$  telle que  $A \cup i(A) = \Gamma^{(1)}$  et  $A \cap i(A) = \emptyset$ . Un tel graphe est appelé un *arbre* si il est connexe et sans cycles. On note  $\text{Aut}(\Gamma)$  le *groupe des automorphismes* de  $\Gamma$ , défini comme le groupe des bijections de  $\Gamma^{(0)}$  qui envoient deux sommets adjacents (*i.e.* qui bordent une arête du graphe) sur deux sommets adjacents. Un graphe  $\Gamma$  sera dit *transitif* si  $\text{Aut}(\Gamma)$  agit transitivement sur les sommets de  $\Gamma$ . Un *graphe borélien*  $\Omega$  est un graphe combinatoire tel que les ensembles de sommets  $\Omega^{(0)}$ , et d'arêtes  $\Omega^{(1)}$  sont des boréliens standard, et les applications  $o, b, i$  décrites précédemment sont boréliennes.

Un *champ de graphes* (sur  $X$ ) est un graphe borélien  $\Sigma = (\Sigma^{(0)}, \Sigma^{(1)})$  *fibré* sur  $X$ . Cela signifie qu'il existe une projection (borélienne)  $p : \Sigma^{(0)} \rightarrow X$  et que les applications  $p \circ o, p \circ b : \Sigma^{(1)} \rightarrow X$  sont égales. De façon certainement plus évocatrice, un champ de graphes (borélien) sur  $X$  est une façon mesurable d'associer à tout  $x \in X$  un graphe  $\Sigma_x$ , la *fibre* au-dessus de  $x$ . L'espace  $X$  est appelé la *base* du champ de graphes.

**Exemple 1.1.3.** — Soit  $\Gamma$  un graphe, et  $X$  un espace borélien standard. Le graphe borélien associé  $X \times \Gamma = (X \times \Gamma^{(0)}, X \times \Gamma^{(1)})$  est un champ de graphes (fibré sur  $X$  pour la projection sur la première coordonnée).

Un isomorphisme entre champs de graphes est une application borélienne (disons entre les ensembles de sommets) qui envoie fibres sur fibres et qui est un isomorphisme de graphes (donc induit un isomorphisme des bases respectives). Un *graphage* (non orienté) de la relation  $\mathcal{R}$  est une partie borélienne (symétrique)  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$  qui engendre  $\mathcal{R}$  comme groupoïde. Dans ce qui suit, nous confondrons  $\mathcal{G}$  avec le graphe borélien dont l'ensemble des sommets est  $X$  et l'ensemble des arêtes est donné par  $\mathcal{G} \subset X \times X$ . Comme cette famille engendre le groupoïde  $\mathcal{R}$ , on définit ainsi une structure de graphe connexe sur chaque orbite. Comme précédemment

dans le cas combinatoire, on dira que le graphage  $\mathcal{G}$  est localement fini lorsque tout élément  $x \in X$  n'a qu'un nombre fini de voisins. On dira qu'un tel graphage est un *arborage* de la relation  $\mathcal{R}$  lorsqu'il existe un ensemble borélien  $A \subset X$  de mesure pleine qui est  $\mathcal{R}$ -invariant et tel que pour tout  $x \in A$ , le graphe induit sur la  $\mathcal{R}$ -orbite de  $x$  (noté  $\mathcal{G}[x]$ ) est un arbre. On notera encore dans la suite  $\Delta_X$  la diagonale  $\{(x, x) | x \in X\}$ , ou seulement  $\Delta$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés.

On renvoie à [Gab00] (ou [KM04], Section 17) pour plus de précisions sur les graphages, mais il faut garder en tête que l'on définit ainsi mesurablement une notion de *voisins* dans chaque orbite (littéralement  $x$  et  $y$  sont  $(\mathcal{G})$ -voisins si  $(x, y) \in \mathcal{G}$ ).

Un tel graphage induit un champ de graphes  $\Sigma_{\mathcal{G}}$  fibré sur  $X$  tel que

$$\Sigma_{\mathcal{G}}^{(0)} := \mathcal{R}, \quad \Sigma_{\mathcal{G}}^{(1)} := \{[(x, y), (x, z)] | x \in X, (y, z) \in \mathcal{G}\}.$$

Un tel champ de graphes possède une structure naturelle de  $\mathcal{R}$ -espace (à gauche) donnée par

$$\left( \begin{array}{ccc} (\mathcal{R}, \pi_2) \star (\Sigma_{\mathcal{G}}, p) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(y,x)}} & \Sigma_{\mathcal{G}} \\ ((y, x), [(x, z), (x, t)]) & \longmapsto & [(y, z), (y, t)] \end{array} \right)$$

Cette action est lisse, *i.e.* possède un domaine fondamental, donné par l'ensemble des arêtes dont une extrémité est sur la diagonale.

Réciproquement, à tout champ de graphes  $\Sigma$  d'ensemble de sommets  $\mathcal{R}$  et qui est  $\mathcal{R}$ -équivariant<sup>(4)</sup> est associé un graphage  $\mathcal{G} \subset X \times X$ , donné par l'ensemble des arêtes de  $\Sigma$  dont une extrémité est sur la diagonale. Notons que pour un tel champ de graphes, chaque fibre est en fait un graphe *pointé* par son sommet sur la diagonale  $\Delta_X$ .

Étant donné  $\mathcal{R}$ , on définit aussi le groupe suivant, appelé le *groupe plein (borélien)*<sup>(5)</sup> de la relation :

$$[\mathcal{R}] := \{\varphi \in \text{Aut}(X) | \forall x \in X, (\varphi(x), x) \in \mathcal{R}\},$$

et le pseudo-groupe associé (ou "*pseudo-groupe plein*") :

$$[[\mathcal{R}]] := \{\varphi : A \rightarrow B \text{ borélienne} | A, B \text{ boréliens de } X \text{ et } \forall x \in A, (x, \varphi(x)) \in \mathcal{R}\}.$$

Avec ces notations, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{R} \text{ préserve } \mu \text{ ssi pour tout } \varphi \in \text{Aut}(X), \varphi \in [\mathcal{R}] \Rightarrow \varphi_* \mu = \mu.$$

Les éléments de  $[\mathcal{R}]$  sont appelés les *isomorphismes intérieurs de la relation*, et les éléments de  $[[\mathcal{R}]]$  sont les *isomorphismes intérieurs partiels* de la relation.

4. La projection  $p : \Sigma^{(0)} \rightarrow X$  est  $\mathcal{R}$ -équivariante, *i.e.* pour tout  $x \sim y$ ,  $(x, y) \cdot \Sigma_x = \Sigma_y$

5. Lorsque l'on identifie entre eux les isomorphismes de  $[\mathcal{R}]$  qui coïncident presque-partout, on appelle aussi "groupe plein" le groupe quotient. Dans le cadre de notre travail, cette distinction n'aura pas d'importance.



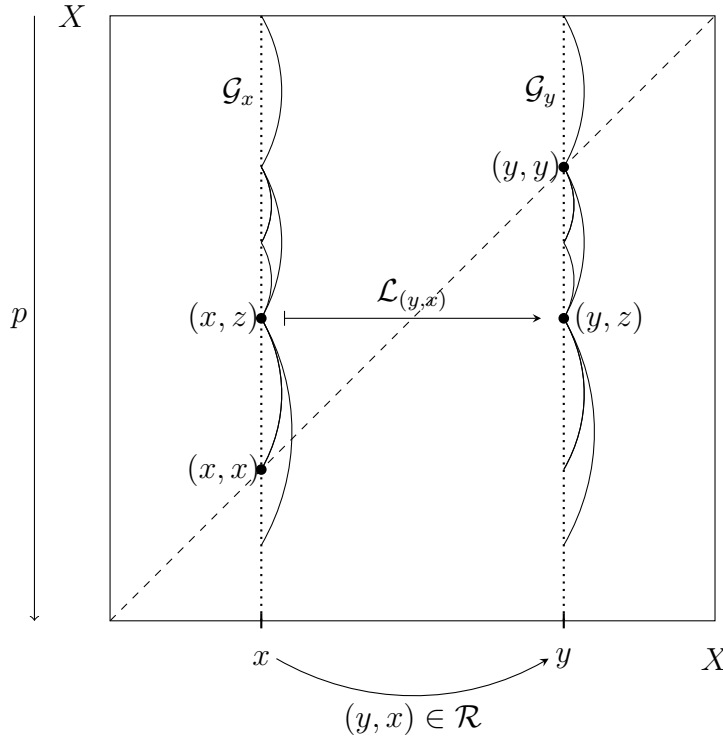


FIGURE 1. Le champ de graphes  $\Sigma_{\mathcal{G}}$  induit par un graphage  $\mathcal{G}$  de la relation  $\mathcal{R}$ .

**Remarque 1.1.2.** — Un graphe borélien localement dénombrable sur le borélien standard  $X$  (i.e. dont l'ensemble des sommets est  $X$ ) peut aussi s'écrire sous la forme  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  pour une certaine famille dénombrable d'isomorphismes partiels, à condition d'identifier chaque fonction  $\varphi_i$  à son graphe dans  $X \times X$ . C'est une conséquence du théorème de Lusin-Novikov (voir encore [Kec95] Theorem 18.10 pour une démonstration complète). Pour des raisons évidentes, la première définition de graphage est aussi appelée graphage non-orienté, et lorsque l'on a identifié une famille d'isomorphismes partiels, on parle de graphage orienté. On peut marquer la différence conceptuelle en appelant une telle famille un  $L$ -graphage ( $L$  pour Levitt, qui le premier en a parlé sous cette forme, voir [Lev95]), ou alors travailler indifféremment avec l'une ou l'autre des définitions lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Remarque 1.1.3 (À titre historique).** — Une autre conséquence du théorème de Lusin-Novikov est le théorème suivant de Feldman-Moore mentionné dans l'introduction (voir [FM77], Theorem 1) : Toute relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables provient de l'action par automorphismes boréliens d'un certain groupe dénombrable.

Quant à savoir si cette action peut être toujours choisie (essentiellement) libre dans le cas p.m.p., c'est une question dont la réponse négative fut donnée dans

un premier temps par S. Adams (voir [Ada88a]), puis dans le cas ergodique par A. Furman (voir [Fur99b], Theorem D). Le théorème de Hjorth cité dans l'introduction indique cependant que c'est le cas lorsque la relation est arborable de coût entier.

## 1.2. Le problème de départ

Formellement, la donnée de départ est une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables (notée  $\mathcal{R}$ ) sur un espace borélien standard probabilisé sans atomes  $(X, \mu)$ , qui préserve  $\mu$ , et graphée par  $\mathcal{G}$ . On utilisera la notation  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  dans ce cas. On notera alors  $\mathcal{G}_x$  la fibre de  $\Sigma_{\mathcal{G}}$  au dessus de  $x$  (voir figure 1). Soit  $\Gamma$  un graphe (infini) dénombrable connexe localement fini ; on suppose que  $\Sigma_{\mathcal{G}}$  est isomorphe au champ de graphes  $X \times \Gamma$  (muni de la projection évidente sur  $X$ , voir exemple 1.1.3). Cela signifie qu'il existe un isomorphisme de graphes boréliens  $\Phi : \Sigma_{\mathcal{G}} \rightarrow X \times \Gamma$  qui induit l'identité sur  $X$ . Comme les fibres de  $\Sigma_{\mathcal{G}}$  sont des graphes implicitement pointés, on suppose qu'il existe un sommet  $v_0$  de  $\Gamma$  tel que  $\Phi((x, x)) = (x, v_0)$  pour tout  $x \in X$ . On note  $\Phi_x$  la restriction de  $\Phi$  à la fibre au dessus de  $x$ .

En d'autres termes, toutes les fibres du champ de graphes sont isomorphes -en tant que graphes *pointés*, au même graphe pointé  $(\Gamma, v_0)$ . Cette propriété sera appelée par la suite *propriété de  $(\Gamma)$ -homogénéité du graphage*, ou l'on dira encore que le graphage  $\mathcal{G}$  est  $\Gamma$ -homogène. En particulier, un tel graphe  $\Gamma$  est nécessairement transitif. Notons au passage que ces hypothèses permettent de définir un cocycle borélien, à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_x, x) & \xrightarrow{\Phi_x} & (\Gamma, v_0) \\ \mathcal{L}_{(x,y)} \downarrow & & \\ (\mathcal{G}_y, y) & \xrightarrow{\Phi_y} & (\Gamma, v_0) \end{array}$$

$$(2) \quad \left( \begin{array}{ccc} \alpha : & \mathcal{R} & \rightarrow \quad \text{Aut}(\Gamma) \\ & (x, y) & \mapsto \alpha(x, y) := \Phi_y \mathcal{L}_{(x,y)} \Phi_x^{-1} \end{array} \right)$$

**Définition 1.2.1.** — On appelle *cocycle* une application borélienne de  $\mathcal{R}$  vers un groupe topologique qui vérifie la relation  $\alpha(x, z) = \alpha(y, z)\alpha(x, y)$  pour  $\nu^{(2)}$ -presque tout  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^{(2)}$  (voir l'exemple 1.1.2 pour la définition de  $\nu^{(2)}$ ).<sup>(6)</sup> Si cette relation est vérifiée pour tout  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^{(2)}$ , alors on parle de *cocycle strict*.

6. On peut aussi demander à ce que cette relation de cocycle soit vérifiée pour les  $x \sim y \sim z$  dans un sous-ensemble borélien de  $X$  de mesure pleine.

**Remarque 1.2.1.** — Par construction, le noyau du cocycle  $\alpha$  (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $\mathcal{R}$  envoyés sur  $\text{Id}_\Gamma$ ) est réduit aux éléments  $(x, x)$ , pour  $x \in X$ . De plus, son image dans  $\text{Aut}(\Gamma)$  intersecte trivialement tout stabilisateur de sommet. On notera par la suite  $G$  le groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$ , et  $Z^1(\mathcal{R}, G)$  l'ensemble des cocycles de  $\mathcal{R}$  à valeurs dans  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

**Remarque 1.2.2.** — À ce stade, on pourrait seulement demander à l'isomorphisme  $\Phi : \Sigma \rightarrow X \times \Gamma$  d'être  $\mu$ -mesurable ou d'être défini seulement pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$  : dans ce cas, quitte à considérer une restriction ad hoc de la relation  $\mathcal{R}$  à un borélien  $\mathcal{R}$ -invariant de mesure pleine, on pourra toujours supposer que  $\alpha$  est un cocycle borélien strict.

L'exemple suivant, que l'on trouvera dans [Gab05], peut être considéré comme le point de départ de cette réflexion sur l'*orientation* des graphages, puisqu'il y apparaît naturellement une relation p.m.p. graphée de façon homogène *sans orientation ni marquage particuliers* :

**Exemple 1.2.1.** — Soit  $(\Gamma, v_0)$  un graphe transitif pointé localement fini. Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(\Gamma)$  qui agit transitivement sur les sommets de  $\Gamma$ . On considère l'action diagonale de  $H \curvearrowright \underbrace{\{0, 1\}^{\Gamma^{(1)}}}_X \times \Gamma$ .

(i) L'action  $H \curvearrowright X$  est essentiellement libre (par exemple pour la mesure canonique  $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes \Gamma^{(1)}}$  sur  $X$ ).

(ii) Le quotient  $H \backslash (X \times \Gamma^{(0)})$  est encore borélien standard (voir [Gab05], Proposition 2.4).

(iii) Par transitivité de l'action de  $H$  sur  $\Gamma^{(0)}$ , on a l'identification suivante (où  $\gamma$  est un élément générique de  $H$ ) :

$$\begin{pmatrix} H \backslash (X \times \Gamma^{(0)}) & \simeq & K_{v_0} \backslash X \\ (gx, g\gamma v_0) & \mapsto & K_{v_0} \gamma^{-1} x \end{pmatrix}$$

(On a désigné par  $K_{v_0}$  le stabilisateur compact de  $v_0$  dans  $H$ . On note  $\bar{\mu}$  la mesure image de  $\mu$  sur  $\bar{X} = K_{v_0} \backslash X$ .)

Considérons le graphe borélien sur  $\bar{X}$

$$\mathcal{G} := (H \backslash (X \times \Gamma^{(0)}), H \backslash (X \times \Gamma^{(1)})).$$

Le champ de graphes associé  $\Sigma_{\mathcal{G}}$ , vu comme un fibré standard sur  $\bar{X}$ , est  $\Gamma$ -homogène. Si le groupe  $H$  est unimodulaire, alors la relation d'équivalence  $\bar{\mathcal{R}}$  associée au graphage  $\mathcal{G}$  sur  $\bar{X}$  préserve la mesure de probabilité  $\bar{\mu}$  ([Gab05], Theorem 2.1). Par ailleurs, il existe une section borélienne  $s : \bar{X} \rightarrow X$  (voir [Kec95], Theorem 18.18). Supposons fixée une telle section  $s$  ; on définit un isomorphisme

de champs de graphes  $\Phi : \Sigma_G \rightarrow \overline{X} \times \Gamma$  (qui envoie la diagonale  $\Delta_{\overline{X}}$  sur  $\overline{X} \times \{v_0\}$ ), de la façon suivante :

$$\Phi : \begin{cases} (\bar{x}, \bar{x}) & \mapsto (\bar{x}, v_0) \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \mapsto (\bar{x}, \gamma v_0) \text{ où } \gamma \text{ est un élément de } H \text{ t.q. } K_{v_0}(\gamma^{-1}s(\bar{x})) = \bar{y}. \end{cases}$$

Comme ci-dessus, on définit le cocycle  $\alpha : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \Phi_{\bar{y}} \mathcal{L}_{(\bar{x}, \bar{y})} \Phi_{\bar{x}}^{-1}$ . Notons que l'ensemble des valeurs prises par  $\alpha$  n'est a priori pas un groupe. Le sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(\Gamma)$  engendré par les valeurs de  $\alpha$  contient alors un sous-groupe  $\text{Hol}(\alpha)$  non trivial de  $H$  qui stabilise la racine  $v_0$  : le sous-groupe d'holonomie associé à  $\alpha$  (voir aussi la remarque 1.4.2 et le paragraphe qui la suit).

### 1.3. Définition du revêtement

**1.3.1. Une première définition.** — À partir de maintenant, sauf précision, on suppose que  $\Gamma$  est un graphe transitif connexe infini dénombrable dont on notera  $\mathfrak{v}$  la valence uniforme, et  $v_0$  un sommet particulier. Le graphe  $\Gamma$  étant supposé localement fini, son groupe d'automorphismes –noté  $G$  à partir de maintenant, est un groupe topologique localement compact pour la topologie de la convergence simple<sup>(7)</sup>. Une base de voisinages de l'identité est donnée par les stabilisateurs (entendus *points par points*) des parties finies de  $\Gamma^{(0)}$ . Ces sous-groupes sont des compacts ouverts et font de  $G$  un groupe topologique totalement discontinu. Le sous-groupe compact ouvert formé des éléments qui stabilisent le sommet  $v_0$  est noté  $K_{v_0}$ , ou parfois seulement  $K$  pour alléger les notations. On note enfin  $m_G$  la mesure de Haar (invariante à gauche) de  $G$  normalisée pour  $m_G(K_{v_0}) = 1$ . Le graphe  $\Gamma$  sera dit *unimodulaire* lorsque  $G$  est lui même unimodulaire, *i.e.* lorsque la mesure de Haar à gauche sur  $G$  est aussi invariante à droite. Une relation d'équivalence borélienne sera dite *lisse* lorsque l'espace quotient (muni de la tribu quotient) est un borélien standard ; c'est par exemple toujours le cas lorsque la relation possède un domaine fondamental borélien, et c'est même une équivalence pour le type de relations que nous regardons (*i.e.* à classes dénombrables ou bien induites par l'action par automorphismes boréliens d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts).

Considérons le cocycle  $\alpha$  défini en (2) et la relation  $\mathcal{R}_\alpha$  sur  $X \times G$  définie par :

$$(x, g) \mathcal{R}_\alpha(x', g') \iff \begin{cases} (x, x') \in \mathcal{R} \\ \alpha(x, x')g = g' \end{cases}$$

La relation de cocycle décrite plus tôt nous assure que l'on définit là une relation d'équivalence. Le groupe  $G$  agit sur  $X \times G$  par  $g \cdot (x, g') = (x, g'g^{-1})$  et cette action

7. Cette topologie est métrisable, séparable et fait de  $G$  un groupe polonais. Par exemple, si on note  $\Gamma^{(0)} = \{\gamma_k\}$ , et  $\delta$  la distance discrète sur  $\Gamma^{(0)}$ , on peut choisir  $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta(\varphi_1(\gamma_k), \varphi_2(\gamma_k))$ .

respecte  $\mathcal{R}_\alpha$ , donc  $G$  agit sur le quotient par

$$g \cdot [(x, g')] = [(x, g'g^{-1})].$$

**Lemme 1.3.1.** — *La relation  $\mathcal{R}_\alpha$  est lisse et  $X \times K_{v_0}$  en est un domaine fondamental. De plus, l'action de  $G$  sur  $\mathcal{R}_\alpha \backslash (X \times G)$  est libre.*

*Démonstration.* — Si  $[(x, k)] = [(y, k')]$  et  $k, k' \in K_{v_0}$ , alors

$$\alpha(x, y)k = k', \text{ donc } \alpha(x, y) \in K_{v_0},$$

ce qui implique  $\alpha(x, y) = 1$  (car l'image de  $\alpha$  intersecte trivialement  $K_{v_0}$  par construction) et  $x = y$  (car le noyau de  $\alpha$  est réduit à la diagonale, cf. remarque 1.2.1), donc  $k = k'$ . Ainsi, chaque  $\mathcal{R}_\alpha$ -orbite intersecte au plus une fois  $X \times K_{v_0}$ .

Par ailleurs, soit  $(x, g) \in X \times G$ . On pose  $(x, x') = \Phi_x^{-1}(g \cdot v_0)$ . On a

$$(\alpha(x, x')g) \cdot v_0 = \Phi_{x'} \mathcal{L}_{(x, x')} \Phi_x^{-1}(g \cdot v_0) = \Phi_{x'}((x', x')) = v_0.$$

Donc  $\alpha(x, x')g \in K_{v_0}$ , i.e.  $(x', \alpha(x, x')g)$  est un (unique) représentant de  $(x, g)$  dans  $X \times K_{v_0}$ . Enfin l'action  $G \curvearrowright (\mathcal{R}_\alpha \backslash (X \times G))$  est libre. En effet, si  $g \cdot [(x, g')] = [(x, g')]$ , alors  $\alpha(x, x)(g'g^{-1}) = g'$ , donc  $g = 1$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1.** — *Cette preuve montre aussi que  $\mathcal{R}_\alpha$  est à classes dénombrables, du fait de la dénombrabilité de  $G/K_{v_0}$ .*

Dans la suite, on note  $f_\alpha$  l'isomorphisme borélien défini par le domaine fondamental  $X \times K_{v_0}$  :

$$(3) \quad \left( \begin{array}{ccc} f_\alpha : \mathcal{R}_\alpha \backslash (X \times G) & \rightarrow & X \times K_{v_0} \\ [(x, g)] & \mapsto & (\mathcal{R}_\alpha \cdot (x, g)) \cap (X \times K_{v_0}). \end{array} \right)$$

**Remarque 1.3.2.** — *L'isomorphisme borélien  $f_\alpha$  est  $K$ -équivariant pour la restriction à  $K$  de l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}$  décrite précédemment, et la multiplication à droite (par l'inverse) sur la deuxième coordonnée de l'espace  $X \times K_{v_0}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(x, g) \in X \times G$  et  $k \in K$ . Il existe par le lemme 1.3.1 un unique  $(y, k_0) \in X \times K$  qui est  $\mathcal{R}_\alpha$ -équivalent à  $(x, g)$ , donc  $f_\alpha[(x, g)] = (y, k_0)$ . On a  $\alpha(x, y)g = k_0$ , donc  $\alpha(x, y)gk^{-1} = k_0k^{-1} \in K$ , et il s'ensuit que  $f_\alpha[(x, gk^{-1})] = (y, k_0k^{-1})$ , ce qui prouve que  $f_\alpha$  est  $K$ -équivariante pour les actions de  $K$  préalablement citées.  $\square$

Considérons le borélien standard  $\tilde{X}_\alpha := \mathcal{R}_\alpha \backslash (X \times G)$ . On note  $\pi_\alpha : X \times G \rightarrow \mathcal{R}_\alpha \backslash (X \times G)$  la projection canonique.

L'espace  $\tilde{X}_\alpha$  fibre sur  $X$  par la projection (borélienne)  $\pi : \tilde{X}_\alpha \rightarrow X$ , elle-même obtenue par l'identification précédente de  $\tilde{X}_\alpha$  avec  $X \times K_{v_0}$  par  $f_\alpha$  :

$$\left( \begin{array}{ccc} \pi : \tilde{X}_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X \times K_{v_0} & \rightarrow & X \\ (x, k) & \mapsto & x \end{array} \right)$$

Ce que l'on peut encore noter  $\pi(\tilde{x}) = \text{proj}_X(f_\alpha(\tilde{x}))$ , pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}_\alpha$ .

On peut souligner dès à présent que si l'on note  $\mathcal{K}$  la relation transitive sur  $K_{v_0}$  et  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$  la relation d'équivalence "produit" sur  $X \times K_{v_0}$ , alors  $f_\alpha$  est un isomorphisme borélien entre les groupoïdes  $\mathcal{R}_G$  (la relation d'équivalence sur  $\tilde{X}$  induite par l'action de  $G$ ) et  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$ . En effet, il suffit de remarquer que pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}_\alpha$ ,  $f_\alpha(G \cdot \tilde{x}) = \mathcal{R}[\pi(\tilde{x})] \times K_{v_0}$ .

Une *section* de la projection  $\pi_\alpha : X \times G \rightarrow \mathcal{R}_\alpha \setminus (X \times G)$  est une application borélienne  $s : \tilde{X}_\alpha \rightarrow X \times G$  telle que  $\pi_\alpha \circ s = id_{\tilde{X}_\alpha}$ . On pourra aussi désigner abusivement par section (d'un borélien) le borélien image par  $s$  dans  $X \times G$ .

**Lemme 1.3.2.** — *Soit  $A$  un borélien de  $\tilde{X}_\alpha$ . Pour toutes sections mesurables  $s, s' : A \rightarrow X \times G$ , on a l'égalité*

$$\mu \otimes m_G(s(A)) = \mu \otimes m_G(s'(A)).$$

*Démonstration.* — Soit  $\Gamma$  un groupe de Feldman-Moore de la relation  $\mathcal{R}_\alpha$ . Soit  $A$  une partie borélienne de  $\tilde{X}$ , et  $s, s' : A \rightarrow X \times G$  deux sections mesurables. On se fixe une énumération de  $\Gamma := \{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Soit  $A_i := \{x \in A \mid i \text{ est le plus petit entier t.q. } \gamma_i s(x) = s'(x)\}$ .

Naturellement,  $A = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  (réunion disjointe), et par injectivité de  $s, s'$  (ici on note  $\delta = \mu \otimes m_G$ ),

$$\begin{aligned} \delta(s(A)) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta(s(A_i)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta(\gamma_i^{-1} s'(A_i)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta(s'(A_i)) \quad (\text{car } \Gamma \curvearrowright X \times G \text{ est p.m.p.}) \\ &= \delta(s'(A)) \end{aligned}$$

□

On peut ainsi définir *intrinsèquement* une mesure de probabilité  $\mu_\alpha$  sur  $\tilde{X}_\alpha$  par :  $\mu_\alpha(A) := \mu \otimes m_G(s(A))$  pour tout borélien  $A \subset \tilde{X}_\alpha$  et  $s$  section mesurable de  $\pi_\alpha$ .

Il devient évident avec cette définition que  $(f_\alpha)_* \mu_\alpha = \mu \otimes m_K$ , puisque  $f_\alpha : \mathcal{R}_\alpha \setminus (X \times G) \rightarrow X \times K$  est une section de  $\pi_\alpha$  par construction.

**Lemme 1.3.3.** — *Si le groupe  $G$  est unimodulaire, alors l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}_\alpha$  définie ci-dessus préserve la mesure  $\mu_\alpha$ .*

*Démonstration.* — Soit  $g \in G$ , et  $A \subset \tilde{X}_\alpha$  une partie borélienne et  $s$  une section (mesurable) de  $A$  dans  $X$ . Comme la projection  $\pi_\alpha$  est  $G$ -équivariante, le borélien

$g \cdot s(A)$  est (l'image par) une section de  $g \cdot A$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(g \cdot A) &= \mu \otimes m_G(g \cdot s(A)) \text{ (par le lemme précédent)} \\
&= \int \int_{X \times G} \chi_{g \cdot s(A)}(x, h) dm_G(h) d\mu(x) \\
&= \int_X \left( \int_G \chi_{g \cdot s(A)}(x, hg^{-1}) dm_G(h) \right) d\mu(x) \text{ (par Fubini et unimodularité de } G) \\
&= \int_X \left( \int_G \chi_{s(A)}(x, h) dm_G(h) \right) d\mu(x) \\
&= \mu \otimes m_G(s(A)) \\
&= \mu_\alpha(A).
\end{aligned}$$

□

En réalité, cette hypothèse d'unimodularité sur  $G$  est automatiquement vérifiée dans notre cadre d'hypothèses, à savoir : si  $\mathcal{R}$  est une relation p.m.p. qui admet un graphage  $\Gamma$ -homogène, alors  $\Gamma$  est unimodulaire. Rappelons à cet effet la proposition suivante due à Damien Gaboriau (voir [Gab05], Theorem 2.5) :

En toute généralité, sur un espace borélien standard probabilisé  $(X, \mu)$  on considère une action essentiellement libre (*i.e.* presque tout  $x \in X$  a un stabilisateur trivial dans  $G$ ) d'un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts  $G$ , et  $K$  un sous groupe compact ouvert de  $G$ .

Il est démontré que l'espace quotient  $\overline{X} := K \backslash X$  est un borélien standard, et l'on définit la relation quotient (ou réduite)  $\overline{\mathcal{R}}$  sur  $\overline{X}$  par :  $x \overline{\mathcal{R}} y$  si et seulement si  $x, y$  ont des pré-images par  $\pi$  qui sont  $G$ -équivalentes. On note  $\overline{\mu}_K$  la mesure image de  $\mu$  au quotient.

**Théorème 1.3.1** ([Gab05], Theorem 2.5). — *La relation d'équivalence  $\overline{\mathcal{R}}$  sur  $\overline{X}$  est borélienne standard à classes dénombrables. De plus,  $\overline{\mathcal{R}}$  préserve la mesure  $\overline{\mu}_K$  ssi  $G$  est unimodulaire.*

*Démonstration.* — On reproduit ici la preuve originale de D. Gaboriau de la seconde partie du théorème. On a évoqué à la définition 1.1.3 que la relation  $\overline{\mathcal{R}}$  préserve la mesure  $\overline{\mu}$  si les mesures  $\nu_1, \nu_2$  sur  $\overline{\mathcal{R}} \subset \overline{X} \times \overline{X}$ , obtenues respectivement à l'aide des projections sur la première et deuxième coordonnée, sont égales. Ainsi, en démontrant l'égalité (4) ci-dessous, on démontre le théorème. Commençons par noter les faits "généraux" suivants :

- (i) Si  $K, K'$  sont deux groupes compacts ouverts de  $G$ , alors l'intersection  $K \cap K'$  est un sous-groupe (compact) ouvert de  $G$ , en particulier, un nombre fini de ses translatés recouvre  $K$ , *i.e.*  $[K : K \cap K'] = |K / (K \cap K')| = m_G(K) / m_G(K \cap K')$ .
- (ii) L'application de réduction  $(K \cap K') \backslash X \rightarrow K \backslash X$  est à fibres finies de cardinal constant égal à  $[K : K \cap K']$ . Elle induit donc une désintégration de la mesure

$\bar{\mu}_{K \cap K'}$  par rapport à  $\bar{\mu}_K$  où la mesure dans les fibres est la mesure (normalisée) de comptage.

(iii) Pour tout  $g \in G$ ,  $m_G(g^{-1}Kg) = \text{mod}(g)m_G(K)$ . Il s'ensuit

$$[K : gKg^{-1} \cap K] = \text{mod}(g)[K : K \cap g^{-1}Kg].$$

Pour  $g \in G$ , considérons le graphe  $C_g := \{(x, gx) | x \in X\}$  et son image dans  $\bar{\mathcal{R}}$  :

$$\bar{C}_g := \{(\bar{x}, \bar{gx}) | x \in X\} = \{(K.x, K.(gx)) | x \in X\}.$$

Pour tout  $k \in K$ ,  $\bar{C}_g = \bar{C}_{kg}$ . En outre, on peut remarquer que  $\bar{\mathcal{R}}$  est la réunion (dénombrable en fait) des  $\bar{C}_g$ . Deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  du graphe  $C_g$  ont la même projection dans  $\bar{C}_g$  ssi il existe  $k, k' \in K$  tels que  $x_1 = kx_2$  et  $gx_1 = y_1 = k'y_2 = k'gx_2$ , ssi (par liberté de l'action de  $G$ , on a alors  $k = g^{-1}k'g$ ) il existe  $k \in (gKg^{-1} \cap K)$  tel que  $x_1 = g^{-1}y_1$ ,  $x_2 = g^{-1}y_2$  et  $y_1 = ky_2$ . Ainsi, la pré-image dans  $C_g$  d'un point de  $\bar{C}_g$  est de la forme (pour un certain couple  $(x, y) \in X \times X$ )

$$\{(kx, gkx) | k \in (K \cap g^{-1}Kg)\} = \{(g^{-1}k'y, k'y) | k' \in (gKg^{-1} \cap K)\},$$

soit encore

$$\bar{C}_g \simeq (K \cap g^{-1}Kg) \backslash X \quad \text{ou} \quad \bar{C}_g \simeq (gKg^{-1} \cap K) \backslash X,$$

selon que  $\bar{C}_g$  est paramétré par la première ou seconde coordonnée. On a donc démontré la proposition suivante :

**Proposition.** — *La projection de  $\bar{C}_g \subset \bar{\mathcal{R}}$  sur la première coordonnée est à fibres finies de cardinal constant presque sûrement égal à  $[K : K \cap g^{-1}Kg]$ . La projection de  $\bar{C}_g \subset \bar{\mathcal{R}}$  sur la deuxième coordonnée est à fibres finies de cardinal constant presque sûrement égal à  $[K : gKg^{-1} \cap K]$ .*

Il s'ensuit (par (ii) et (iii)) que la restriction des mesures  $\nu_1$  et  $\nu_2$  à  $\bar{C}_g$  vérifie

$$(4) \quad \nu_2 = \frac{[K : gKg^{-1} \cap K]}{[K : K \cap g^{-1}Kg]} \nu_1 = \text{mod}(g) \nu_1.$$

□

On en déduit

**Proposition 1.3.1.** — *Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation d'équivalence p.m.p. graphée telle que  $\mathcal{G}$  soit  $\Gamma$ -homogène pour un certain graphe transitif  $\Gamma$  localement fini, alors le graphe  $\Gamma$  est unimodulaire.*

*Démonstration.* — On applique le théorème précédent à la relation  $\mathcal{R}_G$  définie par l'action  $G = \text{Aut}(\Gamma) \curvearrowright (\tilde{X}_\alpha, \mu_\alpha)$ , et  $K := K_{v_0}$ . La relation  $\mathcal{R}$  est la relation réduite de  $\mathcal{R}_G$  et la mesure  $\mu$  est la mesure image de  $\mu_\alpha$  par la projection  $\tilde{X}_\alpha \rightarrow K \backslash \tilde{X}_\alpha$ . □



**Remarque 1.3.3.** — Reprenons les hypothèses de l'exemple 1.2.1 : étant donné un graphe transitif (non-orienté)  $\Gamma$ , on construit un graphage  $\Gamma$ -homogène sur  $G \backslash (X \times \Gamma^{(0)})$  identifié à  $K_{v_0} \backslash X$ , en considérant l'action diagonale de

$$G := \text{Aut}(\Gamma) \curvearrowright \underbrace{\{0, 1\}^{\Gamma^{(1)}}}_X \times \Gamma,$$

et le graphe borélien

$$\mathcal{G}^{fu} := (G \backslash (X \times \Gamma^{(0)}), G \backslash (X \times \Gamma^{(1)})).$$

Le champ de graphes associé est  $\Gamma$ -homogène. Par [Gab05], Theorem 2.1, on sait que la relation d'équivalence  $\mathcal{R}^{fu}$  associée au graphage  $\mathcal{G}^{fu}$  sur  $\overline{X}$  préserve la mesure de probabilité  $\bar{\mu}$  ssi  $G$  est unimodulaire. La proposition 1.3.1 précise donc que, en toute généralité, les seuls graphes (localement finis) qui peuvent apparaître comme des modèles de feuille générique d'une relation p.m.p.<sup>(8)</sup> sont bien les graphes unimodulaires.

Lorsque  $G$  est un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts qui agit librement par automorphismes (boréliens) p.m.p. sur un espace borélien standard probabilisé  $(X, \mu)$ , on peut munir la relation  $\mathcal{R}_G$  de la mesure  $\nu_G$ , image directe de  $\mu \otimes m_G$  par l'application  $(x, g) \mapsto (x, gx)$ .

On a vu que l'application  $f_\alpha$  définie en (3) induisait un isomorphisme des groupoïdes *boréliens* entre  $\mathcal{R}_G$  et  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$ , et à la fois un isomorphisme des espaces *mesurés* entre  $(\tilde{X}_\alpha, \mu_\alpha)$  et  $(X \times K, \mu \otimes m_K)$ . Le lemme suivant montre finalement que  $f_\alpha \times f_\alpha$  est un isomorphisme des groupoïdes *mesurés* entre  $(\mathcal{R}_G, \nu_G)$  et  $(\mathcal{R} \times \mathcal{K}, \tilde{\nu})$  pour la mesure (de Haar)  $\tilde{\nu}$  qui se désintègre de la façon suivante :

$$\tilde{\nu} = \int_{X \times K} \tilde{\nu}^{(x,k)} d(\mu \otimes m_K)((x, k)),$$

où la mesure dans les fibres est donnée par  $\tilde{\nu}^{(x,k)} = \delta_{(x,k)} \otimes (\text{comptage} \otimes m_K)$ .

**Lemme 1.3.4.** — L'isomorphisme borélien

$$\left( \begin{array}{cc} (\mathcal{R}_G, \nu_G) & \rightarrow & (\mathcal{R} \times \mathcal{K}, \tilde{\nu}) \\ (\tilde{x}, g\tilde{x}) & \mapsto & (f_\alpha(\tilde{x}), f_\alpha(g\tilde{x})) \end{array} \right)$$

est un isomorphisme de relations d'équivalence mesurées (une équivalence orbitale) qui est  $(K \times K)$ -équivariant.

*Démonstration.* — On sait déjà que  $(f_\alpha)_* \mu_\alpha = \mu \otimes m_K$ ; il nous suffit donc de montrer que  $f_\alpha$  préserve la mesure dans les fibres.

Soit  $\tilde{x} \in \tilde{X}_\alpha$  (on pose  $f_\alpha(\tilde{x}) = (x, k)$  dans la suite pour fixer les idées), et  $A \subset G$  une partie mesurable. Il y a un isomorphisme évident d'espaces mesurés entre  $G$

8. Au sens où le champ de graphes associé est  $\Gamma$ -homogène

et  $\mathcal{R}_G^{\tilde{x}} = \{(\tilde{x}, g\tilde{x}), g \in G\}$ , on peut donc aussi voir  $A$  comme une partie mesurable de  $\mathcal{R}_G^{\tilde{x}}$ , ce qui donne du sens à  $f_\alpha(A)$  ci-dessous.

Posons  $\{g_1, g_2 \dots\}$  une transversale quelconque des  $K_{v_0}$ -classes à droite dans  $G$  (i.e. les éléments de  $K \backslash G$ ). Ainsi, pour tous  $i \neq j$ ,  $\pi(g_i \tilde{x}) \neq \pi(g_j \tilde{x})$ . Rappelons enfin que  $G$  est unimodulaire. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on définit

$$A_i = \{g \in A \mid \pi(g\tilde{x}) = \pi(g_i \tilde{x})\}.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $f_\alpha(A_i) = \left( (x, k), (\pi(g_i \tilde{x}), \{k \in A \cap K_{v_0} \mid kg_i \in A\}) \right)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^{(x,k)}(f_\alpha(A)) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\nu}^{(x,k)}(f_\alpha(A_i)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{comptage} \otimes m_K)(\pi(g_i \tilde{x}), \{k \in K_{v_0} \mid kg_i \in A\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m_K((Kg_i \cap A)g_i^{-1}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m_K(Kg_i \cap A) \text{ (par unimodularité de } G) \\ &= m_G(A). \end{aligned}$$

Enfin, l'équivariance de l'application pour l'action "coordonnée par coordonnée" de  $K \times K$  est une conséquence directe de la remarque 1.3.2.  $\square$

**Remarque 1.3.4.** — Ce lemme implique en particulier que l'application  $\pi \times \pi$  (qui est un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{R}_G$  sur  $\mathcal{R}$ ) envoie  $\nu_G$  sur  $\nu$ .

D'après le lemme 1.3.4 et la proposition 1.3.1, on obtient :

**Théorème 1.3.2.** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée. On suppose que le graphage  $\mathcal{G}$  est  $\Gamma$ -homogène pour un certain graphe (connexe, transitif, localement fini)  $\Gamma$ . On note  $K$  le stabilisateur compact (dans le groupe  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ) d'un sommet muni de sa mesure de Haar, et  $\mathcal{K}$  la relation transitive sur  $K$  (donc  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$  désigne ci-dessous la relation "produit" sur  $X \times K$ ).

Alors il existe  $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, G)$  un espace borélien standard probabilisé avec une action libre p.m.p. de  $G$ , et un isomorphisme  $(K \times K)$ -équivariant entre les relations d'équivalence mesurées  $(G \ltimes \tilde{X}, \nu_G)$  et  $(\mathcal{R} \times \mathcal{K}, \tilde{\nu})$ .

*Démonstration.* — Il s'agit de l'isomorphisme  $f_\alpha \times f_\alpha$  décrit ci-dessus, et l'action de  $K \times K$  sur les espaces concernés est évidente à condition d'identifier  $G \ltimes \tilde{X}$  avec  $\mathcal{R}_G \subset \tilde{X} \times \tilde{X}$  (voir la remarque 1.3.2).  $\square$

Comme il est rappelé à la remarque 1.3.4, l'application  $\pi \times \pi$  est un *morphisme* (des groupoïdes) surjectif de  $\mathcal{R}_G$  sur  $\mathcal{R}$ . En d'autres termes, on a écrit  $\mathcal{R}$  comme quotient d'une relation d'équivalence borélienne standard mesurée p.m.p. (à classes potentiellement non-dénombrables).

On peut faire écho à la remarque 1.2.2, en notant que la construction précédente est aussi valable dans le cadre purement borélien, lorsque  $\alpha$  (ou respectivement  $\Phi$  l'isomorphisme des champ de graphes) est *strict*, c'est à dire que lorsque la relation de cocycle est vraie "*partout*" (resp. lorsque  $\Phi$  est défini partout).

Dans le cas où la mesure  $\mu$  est seulement quasi-préservée, et  $\mathcal{G}$  est un graphage  $\Gamma$ -homogène ( $\Gamma$  n'est alors plus supposé unimodulaire), la même construction donne alors une action libre  $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{\mu})$  qui se surjecte sur  $\mathcal{R}$  par  $\pi$ , mais la mesure  $\tilde{\mu}$  est seulement quasi-invariante par  $G$ .

#### 1.4. Une construction alternative

On va donner une autre construction d'un "revêtement" (un  $G$ -espace de probabilités)  $\tilde{X}$  au dessus de  $X$  avec les mêmes propriétés, qui ne fait pas intervenir directement le cocycle  $\alpha$ , puis on montrera que l'action obtenue est conjuguée à celle de la première construction. Cette construction possède toutefois l'avantage d'être plus intrinsèque. Pour le moment, on considère en toute généralité,  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation d'équivalence p.m.p. graphée. On désigne toujours par  $\Gamma$  un graphe transitif connexe localement fini, de valence  $\mathfrak{v}$ , et on garde les mêmes notations que dans la partie précédente. Notons  $\tilde{X}$  l'ensemble

$$\tilde{X} = \{f : \Gamma^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)} = X \mid f \text{ morphisme injectif de graphes}\}.$$

Naturellement, le groupe des automorphismes du graphe  $\Gamma$  agit librement sur  $\tilde{X}$  par précomposition par l'inverse :

$$g \cdot f(v) = f(g^{-1}(v)), \forall v \in \Gamma^{(0)}, \forall g \in \text{Aut}(\Gamma).$$

On définit la projection "canonique" suivante

$$\left( \begin{array}{ccc} \pi_0 : & \tilde{X} & \rightarrow & X \\ & f & \mapsto & f(v_0) \end{array} \right)$$

**Remarque 1.4.1.** — *Sous l'hypothèse supplémentaire que la valence du graphage  $\mathcal{G}$  est uniformément bornée par  $\mathfrak{v}$  (la valence uniforme de  $\Gamma$ ), alors de tels morphismes injectifs sont nécessairement surjectifs sur la composante connexe (dans  $\mathcal{G}$ ) de  $f(v_0)$ .*

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe un tel plongement de  $\Gamma$  non-surjectif noté  $j$ . Soit  $v$  un sommet de  $\mathcal{G}[x]$  qui n'est pas dans l'image de  $j$ . Soit  $w \in \text{Im}(j)$ , et  $\gamma := \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  un chemin de  $v$  à  $w$ , et  $\gamma_k$  le premier sommet de  $\gamma$  tel qui n'est pas dans l'image de  $j$ . Par hypothèse, le sommet  $\gamma_{k-1}$  est dans l'image de  $j$ , mais pas l'arête  $[\gamma_{k-1}, \gamma_k]$ , ce qui contredit l'injectivité de  $j$  par un argument de cardinal.  $\square$

**Lemme 1.4.1.** — *L'espace  $\tilde{X}$  est une sous-partie borélienne de  $X^{\Gamma^{(0)}}$  pour la tribu borélienne produit. En particulier,  $\tilde{X}$  est un borélien standard.*

*Démonstration.* — Par Feldman-Moore, soit  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille d'isomorphismes de  $\mathcal{R}$  telle que le graphage  $\mathcal{G} \subset X \times X$  soit la réunion des graphes  $Gr(\varphi_i) := \{(x, \varphi_i(x)) | x \in X\}$ .

Considérons la partie (clairement) borélienne suivante de  $X^{\Gamma^{(0)}}$  constituée des applications  $f$  qui préservent les voisins :

$$Y := \{f \in X^{\Gamma^{(0)}} | \forall (v, w) \in \Gamma^{(1)}, \exists i \in \mathbb{N}, (f(v), f(w)) \in Gr(\varphi_i) \cup Gr(\varphi_i^{-1})\}.$$

On remarque de plus que les applications injectives  $\Gamma^{(0)} \rightarrow X$  forment un borélien de  $X^{\Gamma^{(0)}}$  puisque

$$f : \Gamma^{(0)} \rightarrow X \text{ injective} \iff \forall (v, v') \in (\Gamma^{(0)} \times \Gamma^{(0)}) \setminus \Delta, (f(v), f(v')) \in (X \times X) \setminus \Delta.$$

Les éléments de  $\tilde{X}$  sont simplement les éléments injectifs de  $Y$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

On suppose à partir de maintenant que  $\mathcal{G}$  vérifie la propriété de  $\Gamma$ -homogénéité. En particulier,  $\pi_0(\tilde{X}) = X$  dans ce cas. Cette hypothèse d'homogénéité implique que deux éléments de  $\tilde{X}$  ont la même projection sur  $X$  si, et seulement si, ils sont la même  $K_{v_0}$ -orbite. On peut donc considérer sur l'espace  $\tilde{X}$  la mesure de probabilité  $\tilde{\mu}$  définie par <sup>(9)</sup>

$$(5) \quad \int_{\tilde{X}} f(\tilde{x}) d\tilde{\mu}(\tilde{x}) = \int_X \int_K f(k\tilde{x}) dm_K(k) d\mu(x),$$

pour toute fonction  $f$  mesurable bornée sur  $\tilde{X}$ .

Il reste à montrer que cette mesure est  $G$ -invariante. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de champs de graphes  $\Phi : \Sigma_{\mathcal{G}} \rightarrow X \times \Gamma$ ; cet isomorphisme définit une section mesurable de la projection  $\pi_0$  par

$$\left( \begin{array}{ccc} s : & X & \rightarrow \tilde{X} \\ & x & \mapsto (s_x : v \mapsto \Phi^{-1}(x, v)) \end{array} \right)$$

Cette section induit à son tour un cocycle mesurable  $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow G$  donné par

$$\alpha(x, y) = s_y^{-1} \mathcal{L}_{(x, y)} s_x, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathcal{R}.$$

**Lemme 1.4.2.** — *Les actions  $G \curvearrowright \tilde{X}$  et  $G \curvearrowright \tilde{X}_\alpha$  sont conjuguées. De plus, cette conjugaison préserve les mesures (et donc l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}$  est p.m.p.).*

---

9. Cette définition suppose l'existence d'une section mesurable de  $\pi_0$ ,  $x \mapsto \tilde{x}$  pour la mesurabilité de l'application  $x \mapsto \int_K f(k\tilde{x}) dm_K(k)$ , mais ne dépend clairement pas de la section choisie, puisque  $m_K$  est invariante par multiplication à gauche.

*Démonstration.* — La section  $s$  nous fournit l'identification borélienne suivante :

$$f_s : \begin{cases} \tilde{X} & \rightarrow X \times K_{v_0} \\ j & \mapsto (j(v_0), (\text{l'unique } k \in K_{v_0} \text{ tel que } j = k^{-1} \cdot s_x)) \end{cases}$$

de réciproque  $f_s^{-1} : (x, k) \mapsto k^{-1} \cdot s_x$ .

On décrit maintenant l'action de  $G$  (notée  $a_s$ ) obtenue sur  $X \times K_{v_0}$  par conjugaison par  $f_s$  (en se rappelant que  $G$  agit par précomposition par l'inverse sur  $\tilde{X}$ ) :

Soit  $(x, k) \in X \times K_{v_0}$ . Pour tout  $g \in G$ , on a

$$a_s(g)(x, k) = (y, k'),$$

où  $k'^{-1} \cdot s_y = gk^{-1} \cdot s_x$  pour un unique  $y \sim x$ , et un unique  $k' \in K_{v_0}$ .

Il s'ensuit  $\alpha(x, y)kg^{-1} = k'$ , soit encore  $(x, kg^{-1})\mathcal{R}_\alpha(y, k')$ . Cette action  $a_s$  coïncide donc avec l'action obtenue sur  $X \times K_{v_0}$  en conjuguant par  $f_\alpha$  l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}_\alpha$ . On a ainsi montré la commutativité du diagramme suivant (où on a noté par  $proj_1$  la projection sur la première coordonnée) :

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{X}, G) & \xrightarrow{f_s} & (X \times K_{v_0}, G) & \xleftarrow{f_\alpha} & (\tilde{X}_\alpha, G) \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow proj_1 & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{Id} & X & \xleftarrow{Id} & X \end{array}$$

On peut de plus transporter par  $f_s^{-1}$  la mesure de probabilité naturelle sur  $X \times K_{v_0}$  qui est la mesure produit  $\mu \otimes m_{K_{v_0}}$ . Il est aisé de voir que cette nouvelle mesure est précisément  $\tilde{\mu}$  définie en (5).

De plus, comme  $f_\alpha^{-1}$  est une section mesurable de  $\pi_\alpha : X \times G \rightarrow R_\alpha \backslash (X \times G)$ , il s'ensuit par définition de la mesure  $\mu_\alpha$  (voir le lemme 1.3.2 et la définition qui le suit) que  $(f_\alpha^{-1})_*(\mu \otimes m_{K_{v_0}}) = \mu_\alpha$ .

On a donc montré que le diagramme suivant commute (au sens où les applications  $f_\alpha, f_s$  sont des bijections mesurables  $G$ -équivariantes et préservant les mesures) :

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{X}, \tilde{\mu}, G) & \xrightarrow{f_s} & (X \times K_{v_0}, \mu \otimes m_{K_{v_0}}, G) & \xleftarrow{f_\alpha} & (\tilde{X}_\alpha, \mu_\alpha, G) \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow proj_1 & & \downarrow \pi \\ (X, \mu) & \xrightarrow{Id} & (X, \mu) & \xleftarrow{Id} & (X, \mu) \end{array}$$

Il s'ensuit que l'action de  $G$  sur l'espace  $X \times K_{v_0}$  préserve la mesure  $\mu \otimes m_{K_{v_0}}$ , et donc que l'action de  $G$  sur  $\tilde{X}$  préserve la mesure  $\tilde{\mu}$ . Ainsi, les deux systèmes dynamiques mesurés  $(\tilde{X}_\alpha, \mu_\alpha, G)$  et  $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, G)$  sont isomorphes.  $\square$

**Remarque 1.4.2 (Revêtements "intermédiaires").** — *On suppose  $\mathcal{R}$  ergodique dans cette discussion. Dans la construction précédente de l'espace  $\tilde{X}$ , on remarque que si  $(\tilde{X}_0, \tilde{\mu}_0)$  est une composante ergodique pour l'action sur  $\tilde{X}$  de  $H < G$  un sous-groupe fermé qui agit transitivement sur les sommets de  $\Gamma$ , alors le groupoïde mesuré  $(\mathcal{R}_H, \tilde{X}_0, \nu_H)$  vérifie les mêmes propriétés que dans le théorème 1.3.2, à savoir se surjecte sur  $(\mathcal{R}, X, \nu)$ . Considérant qu'on est à la recherche d'un revêtement minimal (en un certain sens à définir) de  $\mathcal{R}$  qui vérifie toutefois certaines conditions, on est naturellement intéressés par la décomposition ergodique de l'action sur  $\tilde{X}$  d'un sous-groupe dénombrable de  $G$  (qui agit transitivement sur  $\Gamma$ ). Par exemple, si  $\Gamma$  est le graphe de Cayley d'un certain groupe de type fini  $\Lambda$ , alors quelle est la décomposition ergodique de l'action de  $\Lambda$  sur  $\tilde{X}$  qui vient d'être définie ?*

Plaçons-nous dans le cadre de la première construction. Si l'on remplace l'isomorphisme des champs de graphes  $\Phi : \Sigma_{\mathcal{G}} \rightarrow X \times \Gamma$  par l'isomorphisme  $\Phi'$  défini par  $\Phi'(x, y) = (x, f(x)\Phi_x(x, y))$  où  $f : X \rightarrow K_{v_0}$  est une fonction mesurable, le cocycle  $\alpha'$  obtenu vérifie  $\alpha'(x, y) = f(y)\alpha(x, y)f(x)^{-1}$ . Il est dit  $K_{v_0}$ -cohomologue à  $\alpha$ .

Naturellement, changer de cocycle, c'est aussi changer son "range", i.e. l'ensemble des valeurs prises par  $\alpha$  sur  $\mathcal{R}$  (c'est changer de section dans l'exemple 1.2.1). Si l'on désigne par  $H$  le sous-groupe fermé de  $G$  engendré par les valeurs de  $\alpha$  (un tel groupe  $H$  agit nécessairement transitivement sur les sommets de  $\Gamma$ ), on remarque que les composantes  $X \times Hg$  sont  $\mathcal{R}_\alpha$ -invariantes. On peut poser  $\tilde{X}_\alpha := R_\alpha \setminus (X \times H)$  et faire la même construction avec  $H$  au lieu de  $G$ . On obtiendrait ainsi un revêtement "plus petit". Par exemple, si  $H$  l'ensemble des valeurs prises par  $\alpha$  est un groupe, alors  $\Gamma$  est nécessairement un graphe de Cayley (pour le groupe  $H$  d'ailleurs), et l'ensemble  $R_\alpha \setminus (X \times H) \simeq X \times \{1\}$  est  $H$ -invariant. Il s'ensuit que la relation  $\mathcal{R}$  de départ sur  $X$  est induite par une action libre de  $H$ . Une question que l'on peut se poser est : Y a-t-il (au moins dans certains cas) un cocycle "minimal" (au sens où le sous-groupe fermé [noté  $Hol(\alpha)$  à l'exemple 1.2.1] engendré par ses valeurs sur  $\mathcal{R}$  est minimal dans  $G$ ) dans sa classe de  $K_{v_0}$ -cohomologie ? Est-ce que cela donne des informations supplémentaires sur la relation  $\mathcal{R}$  elle-même ?

## 1.5. Le cas des graphes de Cayley

Il est une famille de graphes transitifs qui va particulièrement nous intéresser dans la suite, la famille des *graphes de Cayley*. Soit  $\Lambda$  un groupe de type fini, et  $S$

une partie génératrice finie. On appelle *graphe de Cayley* de  $\Lambda$  relativement à la famille  $S$  (désigné par  $\text{Cay}(\Lambda, S)$  en abrégé) le graphe  $\Gamma$  défini par

$$\Gamma^{(0)} = \Lambda ; \Gamma^{(1)} = \{(\lambda, \lambda s^{\pm 1}) | \lambda \in \Lambda, s \in S\}.$$

Il s'agit donc d'un graphe dont les arêtes sont marquées (par les éléments de  $S$ ) et orientées. Voici un lemme classique qui fait le lien entre graphe transitif et graphe de Cayley :

**Proposition 1.5.1.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe dénombrable localement fini, et soit  $\Lambda$  un groupe qui agit sur  $\Gamma$  par automorphismes de graphe. On suppose que*

- (i)  *$\Lambda$  agit librement transitivement sur les sommets de  $\Gamma$  (i.e. une seule orbite de sommets et le stabilisateur d'un sommet est réduit à l'identité.)*
- (ii)  *$\Lambda$  agit sans inversion sur les arêtes de  $\Gamma$ . (Autrement dit, on ne peut avoir  $\lambda \cdot e = i(e)$ .)*

*Alors, si l'on fixe  $v_0$  un sommet de  $\Gamma$ , il existe  $S \subset \Lambda$  partie génératrice finie telle que  $(\Gamma, v_0) \simeq \text{Cay}(\Lambda, S)$ . (Ici,  $\text{Cay}(\Lambda, S)$  désigne le graphe de Cayley (à droite) de  $\Lambda$  avec la convention de mettre deux arêtes entre  $\lambda$  et  $\lambda s$  si  $s = s^{-1}$ .)*

*Démonstration.* — Fixons  $v_0$  un sommet de  $\Gamma$ , et on note  $n$  sa valence qui est indépendante du sommet choisi par hypothèse. Pour tout sommet voisin de  $v_0$ , il existe un unique  $s \in \Lambda$  qui envoie  $v_0$  sur  $v$ . Notons  $s_1, s_2, \dots, s_n$  les éléments de  $\Lambda$  correspondants aux  $n$  voisins de  $v_0$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'arête  $s_i^{-1}(v_0, s_i v_0) = (s_i^{-1} v_0, v_0)$  est dans  $\Gamma^{(1)}$ , d'extrémité  $v_0$ , donc il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $s_i^{-1} = s_j$ . Notons  $j = \sigma(i)$ . Naturellement,  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , le groupe de permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

La permutation  $\sigma$  est une involution, et la relation  $i \sim \sigma(i)$  partitionne l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $I_0$  un domaine fondamental :  $I_0 = I'_0 \sqcup J$  où  $J = \{\text{points fixes de } \sigma\}$ . Ainsi,  $\llbracket 1, n \rrbracket = I'_0 \sqcup \sigma I'_0 \sqcup J$ .

- a) Pour  $i \in J$ , l'élément  $s_i$  est d'ordre 2 et on a deux arêtes ayant les mêmes extrémités  $v_0$  et  $s_i v_0$  car  $\Lambda$  agit sans inversion. On oriente différemment ces deux arêtes et on les indexe par  $s_i$ .
- b) Pour  $i \in I'_0$ , les arêtes orientées  $(v_0, s_i v_0)$  sont marquées par  $s_i$
- c) Pour  $i \in \sigma I'_0$ , les arêtes orientées  $(s_i v_0, v_0)$  sont marquées par  $s_{\sigma(i)}$ .

On a donc défini un marquage et une orientation sur les arêtes dont une extrémité est  $v_0$ . On remarque deux choses :

- (i) L'action libre et transitive de  $\Lambda$  sur  $\Gamma^{(0)}$  et le choix d'un sommet particulier  $v_0 \in \Gamma^{(0)}$  nous donne une identification des sommets de  $\Gamma$  avec l'ensemble  $\Lambda$ .
- (ii) L'action libre sans inversion sur les arêtes permet d'étendre l'orientation et le marquage à tout le graphe.

En effet, fixons une orientation  $A \subset \Gamma^{(1)}$  sur les arêtes de  $\Gamma$ , et soit  $e \in A$  une arête de  $\Gamma$ . Il existe un unique  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda o(e) = v_0$ . L'arête  $e$  hérite du marquage et de l'orientation correspondante sur  $\lambda e$ . On définit ainsi un marquage

et une orientation sur les arêtes de  $\Gamma$  qui sont  $\Lambda$ -invariants. Considérons désormais l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Gamma, v_0) & \longrightarrow (Cay(\Lambda, S), 1_\Lambda) \\ v \in \Gamma^{(0)} & \longmapsto \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \lambda^{-1}v = v_0 \\ e \in A & \longmapsto \text{arête orientée, marquée correspondant à } \lambda^{-1}e \end{array} \right.$$

C'est clairement un isomorphisme de graphes de par les propriétés de l'action de  $\Lambda$  sur  $\Gamma$  de départ.

*Conclusion* : On a un isomorphisme de graphes pointés  $(\Gamma, v_0) \xrightarrow{\sim} (Cay(\Lambda, S), 1_\Lambda)$ .  $\square$

**Remarque 1.5.1.** — *L'opération qui consiste à "recoller" les arêtes doubles (en supprimant l'orientation) d'un graphe orienté préserve le caractère transitif du graphe et le coloriage (l'opération inverse consistant à "doubler" les arêtes non orientées et mettre des orientations opposées sur les deux copies respectives). En particulier, cette opération permet d'avoir une correspondance entre les actions libres (sur les sommets) sans inversions sur un graphe et les actions libres sur les sommets dans le graphe image. Cela donne aussi une correspondance entre les deux éternelles versions possibles d'un même graphe de Cayley dépendant de la convention choisie sur les éléments d'ordre 2.*

Dans cette section, on suppose donc qu'il existe un groupe infini  $\Lambda$  qui agit par automorphismes de graphe sur  $\Gamma$ , et tel que :

- (i)  $\Lambda$  agit librement transitivement sur les sommets de  $\Gamma$ .
- (ii)  $\Lambda$  agit sans inversion sur les arêtes de  $\Gamma$ .

On se fixe  $v_0 \in \Gamma$ . Par la proposition 1.5.1,  $(\Gamma, v_0)$  s'identifie avec le graphe de Cayley de  $(\Lambda, S)$  pour une certaine partie finie  $S \subset \Lambda$ . On suppose donc dorénavant  $\Gamma = Cay(\Lambda, S)$  et on note  $\rho$  le sommet associé à  $1_\Lambda$ .

Dans ce cas, on a un sous-groupe remarquable de  $G$  qui agit sur  $\tilde{X}$  dans notre construction précédente. On pourra le désigner parfois comme un "*groupe de translations*" dans le groupe des automorphismes du graphe combinatoire  $\Gamma$ . Dans ce sous-groupe, tous les éléments non-triviaux n'ont pas de points fixes dans  $\Gamma$ ; en particulier, c'est un sous-groupe discret (en fait un réseau) de  $G$ . Le coloriage des arêtes défini par le choix d'une partie génératrice est *invariant* par l'action de ce groupe. Cependant, il n'y a pas toujours unicité du groupe de translations pour un graphe donné. On pourra consulter à ce sujet [dLH00], Chapter IV.9.

L'énoncé du théorème 1.3.2 dans ce cas nous donne

**Théorème 1.5.1.** — *Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée. On suppose que  $\mathcal{G}$  est  $Cay(\Lambda, S)$ -homogène pour un certain groupe  $\Lambda$  et une famille génératrice finie  $S$ . Alors il existe un espace borélien standard probabilisé  $(\tilde{X}, \tilde{\mu})$ , une action*



libre p.m.p. de  $G = \text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda, S))$ , telle que la restriction de l'isomorphisme du théorème 1.3.2 au groupoïde mesuré  $\Lambda \ltimes \tilde{X}$  est une isométrie locale (i.e. induit un isomorphisme de graphes en restriction à chaque  $\Lambda$ -orbite [graphée par la famille  $S$ ]).

*Démonstration.* — On prouve la seconde partie du théorème. On prend pour l'espace  $\tilde{X}$  le modèle de la deuxième construction : Pour  $s \in S$ , et  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , on a

$$s \cdot \tilde{x}(v_0) = \tilde{x}(v_1), \text{ avec } v_0 \text{ et } v_1 \text{ voisins.}$$

Par définition,  $\tilde{x}$  est un plongement de graphes, donc  $\tilde{x}(v_0)$  et  $\tilde{x}(v_1)$  sont ( $\mathcal{G}$ -)voisins. Ainsi, pour tout  $(\tilde{x}, s \cdot \tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ , on a  $(\pi_0(\tilde{x}), \pi_0(s\tilde{x})) \in \mathcal{G}$ . L'injectivité de  $\pi_0$  en restriction à une  $\tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$ -classe d'équivalence est immédiate, et la remarque 1.4.1 permet de conclure.  $\square$

L'intérêt de ce cas particulier des graphes de Cayley est que l'on a construit une action p.m.p. d'un groupe discret qui est très liée avec la relation de départ. En particulier, on va pouvoir en déduire quelques corollaires sur l'équivalence orbitale entre groupes. Le lemme suivant est la conséquence principale de ce renforcement de l'hypothèse.

**Lemme 1.5.1 (Relèvement des actions).** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée telle que  $\mathcal{G}$  est  $\text{Cay}(\Lambda, S)$ -homogène (pour un certain groupe de type fini  $\Lambda$ ) ; et soit  $\Lambda' \overset{\alpha}{\curvearrowright} X$  une action (resp. action libre) telle que  $\mathcal{R}(\Lambda' \overset{\alpha}{\curvearrowright} X) \subset \mathcal{R}$ , alors il existe une (unique) action (resp. libre)  $\tilde{\alpha} : \Lambda' \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  telle que :

(i)  $\pi(\tilde{\alpha}(\lambda')(\tilde{x})) = \alpha(\lambda')(\pi(\tilde{x}))$ , pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , pour tout  $\lambda' \in \Lambda'$ .

(ii)  $\mathcal{R}(\Lambda' \overset{\tilde{\alpha}}{\curvearrowright} \tilde{X}) \subset \tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$ .

De plus, si  $\mathcal{R}(\Lambda' \overset{\alpha}{\curvearrowright} X) = \mathcal{R}$ , alors on a  $\mathcal{R}(\Lambda' \overset{\tilde{\alpha}}{\curvearrowright} \tilde{X}) = \tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$ .

*Démonstration.* — On relève l'action de  $\Lambda'$  sur  $\tilde{X}$  en posant pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et pour tout  $\lambda' \in \Lambda'$  :

$$\tilde{\alpha}(\lambda')(\tilde{x}) := \pi^{-1}(\alpha(\lambda')(\pi(\tilde{x}))) \cap (\Lambda \cdot \tilde{x}).$$

La propriété " $\pi$  induit une bijection entre  $\Lambda \cdot \tilde{x}$  et  $\mathcal{R}(\pi(\tilde{x}))$ " montre que cela définit bien un unique point de  $\tilde{X}$ .

On a immédiatement par cette définition que  $\pi(\tilde{\alpha}(\lambda')(\tilde{x})) = \alpha(\lambda')(\pi(\tilde{x}))$  pour tout  $\lambda' \in \Lambda'$  et tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . On vérifie ci-dessous que cela définit bien une action de  $\Lambda'$  sur  $\tilde{X}$  ;

(a) Pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , on a :  $\tilde{\alpha}(1)(\tilde{x}) = \pi^{-1}(\pi(\tilde{x})) \cap (\Lambda \cdot \tilde{x}) = \tilde{x}$ .

(b) Soient  $\lambda'_1, \lambda'_2 \in \Lambda'$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(\lambda'_2)(\tilde{\alpha}(\lambda'_1)(\tilde{x})) &= \pi^{-1}(\alpha(\lambda'_2)(\pi(\lambda'_1\tilde{x}))) \cap \overbrace{\Lambda \cdot (\tilde{\alpha}(\lambda'_1)(\tilde{x}))}^{=\Lambda \cdot \tilde{x} \text{ car } \tilde{\alpha}(\lambda'_1)(\tilde{x}) \in \Lambda \cdot \tilde{x}} \\
 &= \pi^{-1}(\alpha(\lambda'_2) \circ \alpha(\lambda'_1)(\pi(\tilde{x}))) \cap (\Lambda \cdot \tilde{x}) \\
 &= \pi^{-1}(\alpha(\lambda'_2\lambda'_1)(\pi(\tilde{x}))) \cap (\Lambda \cdot \tilde{x}) \\
 &= \tilde{\alpha}(\lambda'_2\lambda'_1)(\tilde{x}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, le groupe  $\Lambda'$  agit (librement si  $\alpha$  est libre, d'après la  $\Lambda'$ -équivariance de  $\pi$ ) sur  $\tilde{X}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}(\Lambda' \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{X}) \subset \tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$ .

Enfin, pour la dernière affirmation, soit  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et  $\lambda \in \Lambda$ . La projection  $\pi$  induit une bijection entre  $\Lambda \cdot \tilde{x}$  et  $\alpha(\Lambda')(\pi(\tilde{x}))$ , donc il existe  $\lambda'_0 \in \Lambda'$  tel que

$$\pi(\lambda \cdot \tilde{x}) = \alpha(\lambda'_0)(\pi(\tilde{x})) = \pi(\tilde{\alpha}(\lambda'_0)(\tilde{x})).$$

Donc par injectivité de  $\pi$  sur  $\Lambda \cdot \tilde{x}$  on a  $\lambda \cdot \tilde{x} = \tilde{\alpha}(\lambda'_0)(\tilde{x})$ , ce qui montre l'inclusion réciproque désirée.  $\square$

Si  $(\mathcal{R}_1, X_1, \mu_1), (\mathcal{R}_2, X_2, \mu_2)$  sont deux relations d'équivalence boréliennes standards à classes dénombrables préservant la mesure, une bijection mesurable  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est une *équivalence orbitale* si pour  $\mu_1$ -presque tout  $x \in X_1$ ,  $f(\mathcal{R}_1 \cdot x) = \mathcal{R}_2 \cdot f(x)$  et  $f_*(\mu_1) = \mu_2$ . On dira que deux groupes dénombrables  $G_1$  et  $G_2$  sont *orbitalement équivalents* (que l'on écrit  $G_1 \stackrel{OE}{\sim} G_2$  en abrégé) si il existe une action *libre* p.m.p. de  $G_1$  sur un espace borélien standard probabilisé  $(X_1, \mu_1)$ , et une action *libre* p.m.p. de  $G_2$  sur un espace borélien standard probabilisé  $(X_2, \mu_2)$  telles que les relations d'équivalence associées sont orbitalement équivalentes. L'équivalence orbitale est une relation d'équivalence sur l'espace des groupes dénombrables. A titre d'exemple, ainsi qu'il était évoqué dans l'introduction, les *groupes moyennables* forment une seule classe d'équivalence pour cette relation (voir [OW80]).

**Corollaire 1.5.1.** — *Si la relation  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est donnée par une action libre p.m.p. d'un groupe dénombrable  $\Lambda'$ , et si  $\mathcal{G}$  est un graphage de  $\mathcal{R}$  qui est  $\text{Cay}(\Lambda, S)$ -homogène, alors  $\Lambda'$  et  $\Lambda$  sont orbitalement équivalents.*

*Démonstration.* — Le théorème 1.5.1 nous donne une action libre p.m.p. de  $\Lambda$  sur  $\tilde{X}$ . Le lemme 1.5.1 nous donne une action libre  $\tilde{\alpha}$  de  $\Lambda'$  sur  $\tilde{X}$  telle que  $\tilde{\mathcal{R}}(\Lambda' \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{X}) = \tilde{\mathcal{R}}_\Lambda$ .  $\square$

**Corollaire 1.5.2.** — *Soit  $\Lambda$  un groupe (dénombrable). Si il existe un arborage de valence constante égale à  $2n$  de la relation d'équivalence induite par une action libre de  $\Lambda$ , alors  $\Lambda$  est orbitalement équivalent à  $\mathbb{F}_n$ .*

Ce dernier exemple fait écho au théorème de Greg Hjorth cité dans l'introduction sur le coût d'un arborage :

**Théorème 1.5.2 ([Hjo06]).** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  une relation d'équivalence p.m.p. ergodique. S'il existe un arborage de  $\mathcal{R}$  de valence moyenne  $2n$ , alors  $\mathcal{R}$  est engendrée par une action libre de  $\mathbb{F}_n$ .

Enfin, pour terminer cette section, on peut revenir sur une question précédemment posée à la remarque 1.4.2, mais sous l'hypothèse d'un graphage  $\text{Cay}(\Lambda, S)$ -homogène cette fois :

**Remarque 1.5.2.** — On peut reprendre les questions sur la décomposition ergodique de l'action de  $\Lambda$  sur  $\tilde{X}$  cette fois. Dans ce cas, on bénéficie d'un théorème de structure sur le groupe des automorphismes d'un graphe de Cayley comme une sorte de produit semi-direct (voir [Jaj00]). Est-ce que l'on peut déterminer cette décomposition ergodique à partir de là ?

Toutefois, si  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  est ergodique, on a au moins un renseignement sur les composantes ergodiques de l'action de  $\Lambda$  sur  $\tilde{X}$  :

On note  $\tilde{\mu} = \int_{\Omega} m_{\omega} d\mathbb{P}(\omega)$  la décomposition ergodique de l'action de  $\Lambda$  sur  $\tilde{X}$ . En appliquant  $\pi$  à cette décomposition, on obtient

$$(6) \quad \mu = \int_{\Omega} \pi_*(m_{\omega}) d\mathbb{P}(\omega).$$

**Affirmation :** Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , la mesure  $\pi_*(m_{\omega})$  est  $\mathcal{R}$ -invariante. En effet, si  $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est un groupe de Feldman-Moore de  $\mathcal{R}$ , alors le lemme 1.5.1 nous donne une action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{X}$  tel que  $\mathcal{R}_{\Gamma} = \mathcal{R}_{\Lambda}$  (donc une action p.m.p.) et telle que  $\pi$  soit  $\Gamma$ -équivariante. On a alors pour  $A \subset X$  un borélien :

$$\pi^{-1}(\gamma_i A) = \gamma_i \cdot \pi^{-1}(A), \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit

$$m_{\omega}(\pi^{-1}(\gamma_i A)) = m_{\omega}(\gamma_i \cdot \pi^{-1}(A)) = m_{\omega}(\pi^{-1}(A)), \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Ainsi,  $\pi_*(m_{\omega})$  est  $\mathcal{R}$ -invariante  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Par ergodicité de  $\mu$ , il s'ensuit par (6) que  $\pi_*(m_{\omega}) = \mu$  pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ .

## 1.6. Du point de vue de l'inclusion orbitale/mesurée

Nicolas Monod introduit dans ([Mon06], Section 5) la notion de *randembedding* entre deux groupes dénombrables  $H$  et  $G$  qui est intuitivement une façon de dire que  $H$  s'injecte mesurablement dans  $G$ . À proprement parler, un *randembedding* de  $H$  dans  $G$  est une mesure de probabilité  $H$ -invariante sur l'espace

$$\{f : H \hookrightarrow G \mid f \text{ injective, } f(1_H) = 1_G\},$$

pour l'action définie par  $h.f(h') = f(h'h)f(h)^{-1}$ . On peut montrer que cette dernière condition est aussi équivalente à l'existence d'un espace (mesuré, standard) de couplage  $(\Omega, m)$  tel que :

- (i)  $H \curvearrowright (\Omega, m) \curvearrowright G$  sont deux actions *lisses*, libres, qui commutent et préservent la mesure  $m$ .
- (ii) Si  $D_H$  (resp.  $D_G$ ) est un domaine fondamental pour l'action de  $H$  (resp. l'action de  $G$ ) alors on a  $m(D_G) \leq m(D_H)$  et  $m(D_G) < \infty$ .

**Définition 1.6.1.** — Lorsque  $H$  et  $G$  vérifient les hypothèses ci-dessus, on dira que  $H$  est mesurablement contenu dans  $G$  et on écrira  $H <_{ME} G$ .

C'est une généralisation naturelle de la relation de mesure équivalence introduite par M. Gromov, où l'on requiert (i) et (ii) en demandant en plus que la mesure des domaines fondamentaux soit *finie*. Il n'est pas difficile de voir que c'est un quasi-ordre (partiel, certes) sur l'ensemble des groupes dénombrables. Naturellement, lorsque  $H \overset{ME}{\sim} G$ , on a  $H <_{ME} G$  ou bien  $G <_{ME} H$ ; mais il n'y a *a priori* aucune raison que les deux inégalités soient satisfaites. De plus, on ne sait pas si  $H <_{ME} G$  et  $G <_{ME} H$  implique  $H \overset{ME}{\sim} G$ .

**Définition 1.6.2.** — Soient  $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ ,  $H \overset{\beta}{\curvearrowright} (X, \mu)$ , deux actions p.m.p. Si  $\mathcal{R}(H \overset{\beta}{\curvearrowright} X) \subset \mathcal{R}(G \overset{\alpha}{\curvearrowright} X)$ , alors on dit que  $H$  est orbitalement contenu dans  $G$ , et on écrit  $H <_{OE} G$ .

**Remarque 1.6.1.** — En prenant  $(\Omega, m) = (\mathcal{R}_G, \nu)$  pour espace de couplage, on montre que

$$H <_{OE} G \Rightarrow H <_{ME} G.$$

Soit  $\Gamma$  un graphe transitif et  $\Lambda < \text{Aut}(\Gamma)$  un sous-groupe, qui agit librement sur  $\Gamma^{(0)}$ . On dira que l'action d'un groupe par automorphismes de graphe est *quasi-transitive* si il y a un nombre fini d'orbites de sommets.

**Corollaire 1.6.1.** — Soit  $\Lambda$  un groupe qui agit librement, quasi-transitivement sur  $\Gamma$ . Soit  $H$  un groupe dénombrable et  $\alpha : H \times X \rightarrow X$  une action libre p.m.p. telle qu'il existe un graphage  $\Gamma$ -homogène de  $\mathcal{R}(H \overset{\alpha}{\curvearrowright} X)$ ; alors  $\Lambda <_{OE} H$ .

*Démonstration.* — Soient  $v_0, \dots, v_n$  des représentants de chaque  $\Lambda$ -orbite de sommets. On prend le second modèle pour  $\tilde{X}$ , celui de la section 1.4. On souhaite "relever" l'action de  $H$  sur  $\tilde{X}$  comme au lemme 1.5.1, mais cette fois-ci, il n'y a pas une unique projection  $\pi_0$  mais  $n$  projections données par  $\pi_i(f) = f(v_i)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Considérons l'espace

$$Y = \tilde{X} \times \llbracket 1, n \rrbracket \simeq \tilde{X} \times \{1\} \sqcup \tilde{X} \times \{2\} \sqcup \dots \sqcup \tilde{X} \times \{n\},$$

muni de la projection

$$\left( \begin{array}{ccc} \pi : & Y & \rightarrow X \\ & (f, k) & \mapsto f(v_k) \end{array} \right)$$

Le groupe  $\Lambda$  agit sur  $Y$ , en considérant l'action initiale sur  $\tilde{X}$  et l'action triviale sur la deuxième coordonnée. Soit  $\mathcal{R}_{\Lambda \times n}$  la relation "amplifiée" sur  $Y$  telle que pour tout  $f_1, f_2 \in \tilde{X}$ , et tout  $k_1, k_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$(f_1, k_1) \mathcal{R}_{\Lambda \times n} (f_2, k_2) \iff f_1 \in \Lambda \cdot f_2.$$

On remarque tout d'abord le fait suivant pour  $h \in H$  et  $f \in \tilde{X}$  :

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un unique  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tel que

$$\pi_l^{-1}(\alpha(h)(\pi_k(f))) \cap (\Lambda \cdot f) \neq \emptyset.$$

En effet,  $\alpha(h)(f(v_k))$  est dans la  $H$ -orbite de  $f(v_k)$ , donc il existe  $w \in \Gamma^{(0)}$  tel que  $f(w) = \alpha(h)(f(v_k))$ ; enfin il existe un unique  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et un unique  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $w = \lambda v_l$ .

On en déduit : la projection  $\pi : Y \rightarrow X$  induit une bijection de la  $\mathcal{R}_{\Lambda \times n}$ -classe de  $(f, k)$  vers la  $H$ -classe de  $\pi((f, k))$  (c'est ici que l'on utilise la liberté de l'action de  $\Lambda$  sur les sommets de  $\Gamma$ ).

Exactement comme au lemme 1.5.1, cela permet de définir une action de  $H$  sur  $\tilde{X} \times \llbracket 1, n \rrbracket$  par :

$$h \odot (f, k) = (\mathcal{R}_{\Lambda \times n} \cap \pi^{-1}(\alpha(h)(\pi(f, k)))).$$

Enfin, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) L'action  $H \curvearrowright Y$  est libre.
- (ii)  $\mathcal{R}(H \curvearrowright Y) = \mathcal{R}_{\Lambda \times n}$ .
- (iii) Par (ii), l'action  $H \curvearrowright Y$  est p.m.p. (pour la mesure  $\frac{1}{n} \tilde{\mu} \otimes (\text{comptage})$ ).

On en conclut  $\Lambda <_{OE} H$ . □

**Remarque 1.6.2.** — On a une sous-relation d'indice fini, donc en particulier, l'espace  $(\mathcal{R}_{\Lambda \times n}, \nu_{\Lambda \times n})$  est un couplage de mesure équivalence entre  $H$  et  $\Lambda$ .

Si  $\Lambda$  agit librement sur  $\Gamma$  sans l'hypothèse de quasi-transitivité, alors on peut généraliser la construction précédente à l'espace de mesure infinie  $\tilde{X} \times \mathbb{N}$  :

**Corollaire 1.6.2.** — Soit  $H$  un groupe dénombrable et  $\alpha : H \times X \rightarrow X$  une action libre p.m.p. telle qu'il existe un graphage  $\Gamma$ -homogène de  $\mathcal{R}(H \overset{\alpha}{\curvearrowright} X)$ ; alors  $\Lambda <_{ME} H$ .

*Démonstration.* — Soit  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de représentants des orbites de sommets. Comme précédemment, on définit pour tout  $i \in \mathbb{N}$  les projections  $\pi_i : \tilde{X} \rightarrow X$  par  $\pi_i(f) = f(v_i)$ , et l'application

$$\left( \begin{array}{ccc} \Pi : & \tilde{X} \times \mathbb{N} & \rightarrow X \\ & (f, k) & \mapsto f(v_k) \end{array} \right)$$

On définit aussi la relation "amplifiée"  $\mathcal{R}_{\Lambda \times \mathbb{N}}$  définie sur  $\tilde{X} \times \mathbb{N}$  par

$$(f_1, k_1) \mathcal{R}_{\Lambda \times \mathbb{N}} (f_2, k_2) \iff f_1 \in \Lambda \cdot f_2.$$

Enfin, on vérifie de même que l'opération

$$h \odot (f, k) = (\mathcal{R}_{\Lambda \times \mathbb{N}} \cdot (f, k) \cap \Pi^{-1}(\alpha(h)(\Pi(f)))) ,$$

est une action libre de  $H$  sur  $\tilde{X} \times \mathbb{N}$  qui préserve la mesure  $\tilde{\mu} \otimes (\text{comptage})$ , et que  $\mathcal{R}(H \curvearrowright (X \times \mathbb{N})) = \mathcal{R}_{\Lambda \times \mathbb{N}}$ . Le couplage  $H \curvearrowright (\mathcal{R}_{\Lambda \times \mathbb{N}}, \nu) \curvearrowright \Lambda$  donne l'inclusion mesurable désirée.  $\square$

**Remarque 1.6.3.** — Sous les hypothèses du corollaire 1.6.2, l'espace  $\mathcal{R}_G$  muni de la mesure  $\nu_G$  nous donnerait un autre couplage entre  $H$  et  $\Lambda$ . En effet, l'action de  $H$  sur  $X$  se relève "trivialement" en une action (libre, p.m.p.) sur  $\tilde{X}$  par l'intermédiaire d'une section  $s : X \rightarrow \tilde{X}$  fixée. Cette section définit un isomorphisme entre  $\tilde{X}$  et  $X \times K$  comme nous l'avons vu au lemme 1.4.2. Il suffit alors de poser

$$h \odot (x, k) = (h \cdot x, k) \text{ pour tout } h \in H, (x, k) \in X \times K.$$

un domaine fondamental de l'action de  $H$  sur  $\mathcal{R}_G$  est

$$\{(f, f') \in \tilde{X}^2 \mid f' = k \cdot f, \text{ pour un certain } k \in K\} \simeq \tilde{X} \times K.$$

Un domaine fondamental pour l'action de  $\Lambda$  sur  $\mathcal{R}_G$  serait par exemple

$$\{(f, f') \in \tilde{X}^2 \mid f(v_n) = f'(v_m) \text{ pour un certain couple d'entiers } (n, m)\} \simeq \tilde{X} \times \mathbb{N} \times K.$$

On peut à ce niveau poser la question suivante : Est-ce qu'il existe (sous les hypothèses du corollaire 1.6.2) une inclusion orbitale entre  $H$  et  $\Lambda$  ?

En généralisant la notion de couplage aux groupes localement compacts, unimodulaires, à base dénombrable d'ouverts (même définition, voir section 1.10), on voit que, sous les hypothèses précédentes du corollaire 1.6.2, l'espace  $(\mathcal{R}_G, \nu_G)$  est aussi un couplage pour la paire  $(G, H)$ .

Par ailleurs, la définition d'équivalence orbitale se généralise bien au cadre des actions libres p.m.p. de groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts ; il suffit de considérer un isomorphisme des groupoïdes (relations d'équivalence) mesurés associés (donc on rappelle ci-dessous dans un cas particulier une définition donnée en page 20) :

**Définition 1.6.3.** — Pour  $G_i \stackrel{\alpha_i}{\curvearrowright} (X_i, \mu_i), i = 1, 2$  deux telles actions, une équivalence orbitale est un isomorphisme borélien entre deux boréliens de mesure pleine  $\phi : X'_1 \rightarrow X'_2$  telle que (si on note  $\mathcal{R}'_{G_i}$  les relations induites correspondantes)

$$(\phi \times \phi)(\mathcal{R}'_{G_1}, \nu_{G_1}) = (\mathcal{R}'_{G_2}, \nu_{G_2}).$$

Pour  $G_1, G_2$  deux groupes localement compacts unimodulaires à base dénombrable d'ouverts, s'il existe deux actions libres p.m.p. orbitalement équivalentes on notera  $G_1 \stackrel{OE}{\sim} G_2$ . Comme dans le cas des groupes dénombrables, on définit ainsi une relation d'équivalence dans cette famille plus large de groupes.

Dans la suite, on note  $\mathcal{I}$  la relation d'équivalence transitive sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $\mathcal{R} \times \mathcal{I}$  la relation d'équivalence mesurée sur le produit. Pour clarifier, l'espace probabilisé sous-jacent est  $X \times [0, 1]$  muni de la mesure  $\tilde{\mu} = \mu \otimes \text{Leb}_{[0,1]}$ , et la mesure  $\tilde{\nu}$  sur  $\mathcal{R} \times \mathcal{I}$  se désintègre de la façon suivante :

$$\tilde{\nu} = \int_{X \times [0,1]} \tilde{\nu}^{(x,t)} d\tilde{\mu}((x,t)),$$

où  $\tilde{\nu}^{(x,t)} = \delta_{(x,t)} \otimes (\text{comptage} \otimes \text{Leb}_{[0,1]})$ .

Supposons qu'il existe  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  une relation d'équivalence p.m.p. à classes dénombrables et deux graphages  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  de la relation  $\mathcal{R}$  qui sont respectivement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ -homogènes. Sous l'hypothèse supplémentaire que la mesure de Haar de  $G_1 = \text{Aut}(\Gamma_1)$  (resp.  $G_2 = \text{Aut}(\Gamma_2)$ ) est continue, *i.e.* sans atomes, et normalisée sur les stabilisateurs  $K_1$  et  $K_2$ , on a par le théorème 1.3.2

$$\mathcal{R}_{G_1} \stackrel{OE}{\sim} \mathcal{R}_{G_2} \stackrel{OE}{\sim} \mathcal{R} \times \mathcal{I},$$

la seconde *OE* considérée étant clairement définie par un isomorphisme borélien  $(K_2, m_2) \simeq ([0, 1], \text{Leb})$ . On a aussi une forme de réciproque à ce résultat :

**Proposition 1.6.1.** — (i) Pour tout  $\Gamma_1, \Gamma_2$  graphes transitifs unimodulaires, de mesure de Haar continue, s'il existe  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  p.m.p. et  $\mathcal{G}_1$  (resp.  $\mathcal{G}_2$ ) un  $\mathcal{R}$ -graphage  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ )-homogène, alors  $\text{Aut}(\Gamma_1) \stackrel{OE}{\sim} \text{Aut}(\Gamma_2)$ .  
(ii) Réciproquement, si  $G_1, G_2$  sont deux groupes localement compacts unimodulaires à base dénombrable d'ouverts et  $\alpha_1, \alpha_2$  deux actions libres p.m.p. telles que l'on a  $\mathcal{R}(G_1 \curvearrowright^{\alpha_1} X_1) \stackrel{OE}{\sim} \mathcal{R}(G_2 \curvearrowright^{\alpha_2} X_2)$ , alors les relations p.m.p. obtenues au quotient (par des sous-groupes compacts ouverts  $K_1, K_2$  respectivement, voir aussi le théorème 1.3.1) sont *SOE* (voir la définition ci-dessous).

**Définition 1.6.4.** — Soient  $(\mathcal{R}_i, X_i, \mu_i), (i = 1, 2)$  deux relations p.m.p. à classes dénombrables. On dit que  $\mathcal{R}_1 \stackrel{SOE}{\sim} \mathcal{R}_2$  (*SOE* pour *Stable Orbit Equivalence*) si il existe deux boréliens qui rencontrent chaque orbite  $A_i \subset X_i$  tels que  $(\mathcal{R}_1)_{|A_1} \stackrel{OE}{\sim} (\mathcal{R}_2)_{|A_2}$  pour les mesures respectives normalisées  $(\mu_i)_{|A_i} / \mu_i(A_i), i = 1, 2$ .

Cette définition est une version "pour les relations" de l'équivalence mesurée déjà abordée pour les groupes. On peut montrer notamment que deux groupes dénombrables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  admettent des actions libres p.m.p. qui sont *SOE* ssi ils admettent un couplage de *ME* (cf. [Fur99b], Section 2). On prouve ci-dessous la partie (ii) de la proposition 1.6.1 :

*Démonstration.* — (voir aussi [FM77], Theorem 3.) On suppose, quitte à conjuguer l'action de  $G_2$  par un isomorphisme, qu'il existe un espace probabilisé  $(X, \mu)$  et  $G_1, G_2 \curvearrowright (X, \mu)$  deux actions libres p.m.p. telles que  $\mathcal{R}_{G_1} = \mathcal{R}_{G_2} = \mathcal{R}$ . On peut de plus supposer que  $\mathcal{R}$  est ergodique, ce qui implique naturellement que

les relations discrètes "réduites"  $\overline{\mathcal{R}}_i, i = 1, 2$  sont elles-mêmes ergodiques. On fixe  $s_i : \overline{X}_i \rightarrow X$  deux sections boréliennes respectives de  $\pi_i : X \rightarrow \overline{X}_i = K_i \backslash X, i=1,2$ . On pose

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \pi_2 \circ s_1 : \overline{X}_1 \rightarrow \overline{X}_2, \\ \phi_2 &= \pi_1 \circ s_2 : \overline{X}_2 \rightarrow \overline{X}_1.\end{aligned}$$

Pour  $\bar{\mu}_1$ -presque tout  $x \in \overline{X}_1, \phi_2 \circ \phi_1(x) \in \overline{\mathcal{R}}_1[x]$ , et pour  $\bar{\mu}_2$ -presque tout  $y \in \overline{X}_2, \phi_1 \circ \phi_2(y) \in \overline{\mathcal{R}}_2[y]$ . En effet, soit  $\bar{x} \in \overline{X}_1$  et notons  $x = s_1(\bar{x}) \in X$  :

$$s_2 \circ \pi_2(x) \in \mathcal{R}[x], \text{ donc } (\pi_1(s_2 \circ \pi_2(x)), \pi_1(x)) \in \overline{\mathcal{R}}_1,$$

soit encore  $\phi_2 \circ \phi_1(\bar{x}) \in \overline{\mathcal{R}}_1[\bar{x}]$ . En particulier,  $\phi_1 \circ \phi_2$  et  $\phi_2 \circ \phi_1$  sont à fibres dénombrables, donc  $\phi_1, \phi_2$  sont aussi à fibres dénombrables. On en déduit qu'il existe  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition borélienne dénombrable de  $X_1$  telle que  $(\phi_1)|_{C_n}$  est un isomorphisme sur son image pour tout  $n$ .

De plus, si  $N \subset \overline{X}_1$  est un ensemble négligeable,  $\phi_1(X_1 \setminus N)$  a une  $\bar{\mu}_2$ -mesure positive. En effet,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_2(\phi_1(X_1 \setminus N)) &= \mu(K_2 \cdot s_1(X_1 \setminus N)), \\ \text{et } \underbrace{\mu(G_1 \cdot s_1(X_1 \setminus N))}_{=1} &= \mu(G_2 \cdot s_1(X_1 \setminus N)) \\ &= \mu\left(\bigcup_{g \in G_2/K_2} g(K_2 \cdot s_1(X_1 \setminus N))\right).\end{aligned}$$

Cette dernière réunion est dénombrable et  $G_2$  préserve  $\mu$ , donc finalement on obtient  $\bar{\mu}_2(\phi_1(X_1 \setminus N)) > 0$  pour tout ensemble négligeable  $N$ .

Notons que le même calcul avec un borélien quelconque  $A \subset X_1$  de mesure non-nulle au lieu de  $X_1 \setminus N$  montre que  $\phi_1$  envoie  $\bar{\mu}_1$  sur une mesure équivalente à  $\bar{\mu}_2$ .

On pose  $N = \bigcup \{C_n | \bar{\mu}_1(C_n) = 0\}$ , ainsi il existe un certain  $C_{n_0}$  tel que  $\bar{\mu}_1(C_{n_0}) > 0$  et  $\bar{\mu}_2(\phi_1(C_{n_0})) > 0$ .

On vérifie par ailleurs aisément que

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}_1, (\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{\mathcal{R}}_1 \iff (\phi_1(\bar{x}), \phi_1(\bar{y})) \in \overline{\mathcal{R}}_2.$$

Ainsi,  $\psi = (\phi_1)|_{C_{n_0}}$  est un isomorphisme entre  $(\overline{\mathcal{R}}_1)|_{C_{n_0}}$  et  $(\overline{\mathcal{R}}_2)|_{\phi_1(C_{n_0})}$ . Notons que la normalisation de  $(\phi_1)_*(\bar{\mu}_1)|_{C_{n_0}}$  est une mesure de probabilité ergodique et  $(\overline{\mathcal{R}}_2)|_{\phi_1(C_{n_0})}$ -invariante, dans la même classe que  $(\bar{\mu}_2)|_{\phi_1(C_{n_0})}$  donc lui est égale.  $\square$

**Exemple 1.6.1.** — Dans le cas particulier où  $\Lambda_1, \Lambda_2$  sont deux groupes dénombrables orbitalement équivalents, alors pour toute famille génératrice finie  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) de  $\Lambda_1$  (resp.  $\Lambda_2$ ) telle que la mesure de Haar de  $\text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda_1, S_1))$  (resp.  $\text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda_2, S_2))$ ) soit continue, on a d'après la proposition 1.6.1(i),

$$\text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda_1, S_1)) \stackrel{OE}{\sim} \text{Aut}(\text{Cay}(\Lambda_2, S_2)).$$



Enfin, pour terminer, si le graphe (*a fortiori*) de Cayley ne possède aucune symétrie (*i.e.* le stabilisateur d'un sommet est trivial et  $\text{Aut}(\Gamma)$  est réduit aux "translations"), alors par construction l'espace  $\tilde{X}$  est l'espace  $X$  lui-même. On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.6.3.** — *Si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation p.m.p. graphée et  $\Gamma$ -homogène telle que  $\text{Aut}(\Gamma)$  agit librement sur  $\Gamma$ , alors  $\mathcal{R}$  est induite par une action libre de  $\text{Aut}(\Gamma)$ .*

**Remarque 1.6.4.** — *Dans la même veine, si les stabilisateurs dans  $G$  des sommets sont finis, alors ils ont tous même cardinal et  $\tilde{X} \simeq X \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a donc  $\mathcal{R}_G \simeq \mathcal{R} \times \mathcal{I}_n$  par le théorème 1.3.2, ce qui fournit (sous certaines hypothèses de liberté sur les actions) un couplage d'équivalence mesurée.*

## 1.7. La propriété (T) de Kazhdan

Au milieu des années 1960, D. Kazhdan formula une propriété pour les groupes qu'il nomma la propriété (T) (*cf.* [Kaz67]). Une quinzaine d'années plus tard, R. Zimmer énonça une propriété correspondante pour les groupoïdes mesurés (*cf.* [Zim81]). On montre dans cette section que si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation graphée  $\Gamma$ -homogène, alors  $\mathcal{R}$  a la propriété (T) ssi  $\text{Aut}(\Gamma)$  a la propriété (T).

**Définition 1.7.1.** — *Soit  $G$  un groupe topologique, et  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation unitaire continue (*i.e.* pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ ,  $g \mapsto \pi(g)\xi$  est continue) de  $G$ .*

1. *Soit  $Q$  une famille de  $G$  et  $\varepsilon > 0$ . On dira qu'un vecteur  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  est  $(Q, \varepsilon)$ -invariant si*

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|.$$

2. *La représentation  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  possède presque des vecteurs invariants si elle possède des vecteurs  $(Q, \varepsilon)$ -invariants pour tout compact  $Q \subset G$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ .*
3. *La représentation  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  possède un vecteur invariant (non trivial) si il existe  $\xi \neq 0$  tel que  $\pi(g)\xi = \xi, \forall g \in G$ .*

**Définition 1.7.2** ([Kaz67]). — *On dit qu'un groupe topologique  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si pour toute représentation unitaire (continue)  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  de  $G$  qui possède presque des vecteurs invariants, il existe un vecteur  $G$ -invariant (non-trivial) pour  $\pi$ .*

**Définition 1.7.3.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe transitif localement fini. On dira que le graphe  $\Gamma$  a la propriété (T) si son groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(\Gamma)$  a la propriété (T).*

On définit maintenant la propriété (T) pour les relations d'équivalence :

Soit  $(\mathcal{R}, \nu)$  une relation d'équivalence borélienne mesurée sur un espace probabilisé standard  $(X, \mu)$ <sup>(10)</sup>, et  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On dira que l'application borélienne  $L : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  est une représentation de  $\mathcal{R}$  (sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ) si pour presque tout  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^{(2)}$  (i.e. l'espace borélien standard mesuré des triplets  $(x, y, z)$  tels que  $x \sim y \sim z$ ), on a

$$L(x, z) = L(x, y)L(y, z).$$

Par la suite, on notera  $Z^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$  l'ensemble des représentations de  $\mathcal{R}$  sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et on définit  $L'$  équivalent à  $L$  si il existe une certaine application borélienne  $b : X \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  telle que  $L'(x, y) = b(x)L(x, y)b(y)^{-1}$  pour  $\nu$ -presque-tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Par analogie avec les groupes de cohomologie on note abusivement  $H^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$  l'ensemble des classes d'équivalence des représentations de  $\mathcal{R}$  dans le groupe polonais  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ .

On dira que  $L$  contient presque des sections (unitaires) invariantes s'il existe une suite d'applications boréliennes  $\xi_n : X \rightarrow \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$  telles que pour  $\nu$ -presque tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$ ,

$$\lim_n L(x, y)\xi_n(x) - \xi_n(y) = 0.$$

Enfin la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  possède la propriété (T) si toute représentation  $L$  qui possède presque des sections unitaires invariantes possède une section unitaire invariante. D'après les travaux de R.J. Zimmer (voir [Zim81]), on a le théorème suivant qui fait le lien entre les deux définitions de la propriété (T) :

**Théorème 1.7.1 (Zimmer).** — *Soit  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts qui agit sur l'espace de probabilités  $(X, \mu)$  et préserve  $\mu$ . Si  $G$  a la propriété (T), alors  $\mathcal{R}_G$  a la propriété (T). Réciproquement, si  $\mathcal{R}(G \curvearrowright X)$  a la propriété (T) et l'action est libre et faiblement mélangeante, alors  $G$  a (T).*

Une vingtaine d'années plus tard, en s'appuyant sur un théorème de B. Bekka et A. Valette (cf. [BV93]), A. Furman démontre que l'hypothèse "faiblement mélangeante" sur l'action du groupe est inutile. Cela conduit en outre à montrer que la propriété (T) est un invariant d'OE, et plus généralement de ME (cf. [Fur99a], Corollary 1.4).

On a le corollaire suivant pour  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée et  $\Gamma$ -homogène :

**Corollaire 1.7.1.** — *Si  $\Gamma$  a la propriété (T), alors  $\mathcal{R}$  a la propriété (T). Réciproquement, si  $\mathcal{R}$  a la propriété (T), et s'il existe un graphage homogène de  $\mathcal{R}$  pour un certain graphe  $\Gamma$ , alors le graphe  $\Gamma$  a la propriété (T) au sens de la définition 1.7.3 ci-dessus.*

10. Noter que l'on est en toute généralité ici : on ne suppose pas les classes dénombrables, on suppose seulement que la mesure  $\nu$  est  $\sigma$ -finie, que la classe de  $\nu$  est invariante par  $(x, y) \mapsto (y, x)$  et que les mesures  $\nu^x$  dans les fibres vérifient  $\nu^x \sim \nu^y$  pour  $\nu$ -presque tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$ .

*Démonstration.* — On démontre d'abord la première partie du corollaire, en remarquant qu'il y a une injection *canonique*

$$\left( \begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H})) & \hookrightarrow & Z^1(\tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{U}(\mathcal{H})) \\ L & \mapsto & (\iota(L) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto L(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))) \end{array} \right)$$

Supposons donc que le graphe  $\Gamma$  a la propriété (T). Soit  $L : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  une représentation de  $\mathcal{R}$ , et  $(\xi_n)$  une suite de sections boréliennes unitaires presque invariante pour  $L$ . Définissons la représentation induite  $\tilde{L}$  pour  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y}) := L(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \text{ et } \tilde{\xi}_n(\tilde{x}) := \xi_n(\pi(\tilde{x})).$$

On vérifie que  $(\tilde{\xi}_n)$  est une suite presque invariante pour  $\tilde{L}$  :

Soit, par hypothèse,  $X_0 \subset X$  un ensemble de  $\mu$ -mesure pleine, tel que pour tout  $(x, y) \in \mathcal{R} \cap (X_0 \times X_0)$ , on a  $L(x, y)\xi_n(x) - \xi_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Ainsi, pour  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\pi \times \pi)^{-1}(X_0 \times X_0)$  :

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\xi}_n(\tilde{x}) - \tilde{\xi}_n(\tilde{y}) = L(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))\xi_n(\pi(\tilde{x})) - \xi_n(\pi(\tilde{y})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par le théorème 1.7.1,  $\tilde{\mathcal{R}}$  a la propriété (T), donc il existe  $\tilde{\xi} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}_1(\mathcal{H})$  telle que

$$\tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{\xi}(\tilde{y}), \text{ } \nu_G\text{-presque-partout.}$$

On pose  $\xi(x) = \int_K \tilde{\xi}(k\tilde{x}) dm_K(k)$  (par exemple pour  $x \mapsto \tilde{x}$  une section mesurable de  $\pi$ ). Ainsi, toujours pour presque tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} L(x, y)\xi(x) &= L(x, y) \int_K \tilde{\xi}(k\tilde{x}) dm_K(k) \\ &= \int_K \tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\xi}(k\tilde{x}) dm_K(k) \\ &= \int_K \tilde{L}(k\tilde{x}, k\tilde{y})\tilde{\xi}(k\tilde{x}) dm_K(k) \\ &= \int_K \tilde{\xi}(k\tilde{y}) dm_K(k) \\ &= \xi(y) \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\tilde{L}(\tilde{x}, k\tilde{x}) = 1$  presque sûrement en  $(\tilde{x}, k)$ , donc on a

$$\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{L}(\tilde{x}, k\tilde{x})\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{\xi}(k\tilde{x}),$$

pour presque tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et pour  $m_K$ -presque tout  $k \in K$ . Ainsi,  $\xi(\pi(\tilde{x})) = \tilde{\xi}(\tilde{x})$   $\tilde{\mu}$ -presque sûrement, donc la section invariante  $\xi$  définie ci-dessus est bien unitaire (donc non-nulle).

Pour la réciproque, remarquons seulement que l'injection canonique  $Z^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H})) \hookrightarrow Z^1(\tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$  définie précédemment, induit en fait une bijection entre  $H^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$  et  $H^1(\tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ , de sorte que  $\mathcal{R}$  a la propriété (T) ssi  $\tilde{\mathcal{R}}$  a la propriété (T).

En effet, soit  $s : X \rightarrow \tilde{X}$  une section borélienne de  $\pi$ , et soit  $L \in Z^1(\tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ . Pour tout  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{R}}$ , on a

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{y}) &= L(\tilde{x}, s(\pi(\tilde{x})))L(s(\pi(\tilde{x})), s(\pi(\tilde{y})))L(s(\pi(\tilde{y})), \tilde{y}) \\ &= V(\tilde{x})L(s(\pi(\tilde{x})), s(\pi(\tilde{y})))V(\tilde{y})^{-1} \\ &\sim \iota(l), \end{aligned}$$

où  $V(\tilde{z}) = L(\tilde{z}, s(\pi(\tilde{z})))$  est une application  $\tilde{\mu}$ -mesurable, et  $l(x, y) = L(s(x), s(y))$  est un élément de  $Z^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ . Il s'ensuit par le renforcement du théorème 1.7.1 que le groupe  $G$  (donc le graphe  $\Gamma$ ) a  $(T)$ .  $\square$

### 1.8. Questions de moyennabilité

**Définition 1.8.1.** — *Un groupe topologique  $G$  est dit moyennable s'il existe une fonction  $m$  (une "moyenne") définie sur la tribu des boréliens de  $G$  telle que :*

(i)  $m(G) = 1$ ,

(ii)  $m$  est finiment additive,

(iii)  $m$  est invariante pour l'action par multiplication à gauche de  $G$ .

**Définition 1.8.2.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe localement fini, de valence uniformément bornée. On dit que  $\Gamma$  est moyennable si il existe une suite  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-graphes finis tels que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial \Gamma_n^{(0)}|}{|\Gamma_n^{(0)}|} = 0,$$

où  $\partial \Gamma_n^{(0)} = \{v \in \Gamma^{(0)} \setminus \Gamma_n^{(0)} \mid v \text{ est relié à } \Gamma_n^{(0)} \text{ par une arête.}\}$

Comme pour la propriété  $(T)$  de Kazhdan, on est tentés de définir la moyennabilité d'un graphe transitif *unimodulaire* à partir de son groupe d'automorphismes ; un tel graphe sera dit moyennable si son groupe d'automorphismes est moyennable. D'après ([SW90], Theorem 1.c) ou Corollary 1), cette définition de graphe moyennable est bien équivalente à la définition de moyennabilité qui fait intervenir le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur le graphe, qui est elle même équivalente à la définition donnée ci-dessus (pour cette dernière affirmation, on peut se reporter à [BMST88]).

La notion de moyennabilité a été étendue par R.J. Zimmer aux groupoïdes mesurés, d'abord en des termes d'*action de groupoïde* sur des champs mesurables de compacts convexes dans des Banach ; puis, et c'est toute la richesse de cette notion, de nombreuses équivalences ont été démontrées pour différentes définitions de moyennabilité (voir aussi [ADR00]).

**Définition 1.8.3 (Zimmer, [Zim78]).** — Soit  $(\mathcal{R}, \nu, X, \mu)$  une relation d'équivalence borélienne mesurée. On dit que  $\mathcal{R}$  est moyennable si pour tout espace de Banach séparable  $E$ , pour tout cocycle mesurable  $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \text{Iso}(E)$  dans le groupe des isométries de  $E$ , et pour tout champ mesurable  $x \mapsto K_x$  de  $w^*$ -compacts convexes de  $E^*$  qui est  $\mathcal{R}$ -équivariant<sup>(11)</sup>, il existe un point fixe, i.e. une fonction borélienne  $e : X \rightarrow E^*$  telle que

$$(7) \quad e(x) \in K_x \text{ } \mu\text{-presque sûrement et}$$

$$(8) \quad (\alpha(x, y)^{-1})^* e(y) = e(x), \nu\text{-presque-sûrement.}$$

Comme précédemment pour la propriété (T), on peut montrer dans notre cas que la relation (discrète, p.m.p.)  $(\mathcal{R}, \nu)$  est moyennable ssi la relation  $(\tilde{\mathcal{R}}_G, \nu_G)$  associée par le théorème 1.3.2 est moyennable. En particulier, le théorème 1.3.2 couplé à cette dernière remarque nous donne le corollaire suivant :

**Corollaire 1.8.1.** — Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation p.m.p. graphée et  $\Gamma$ -homogène. Si  $\Gamma$  est moyennable au sens ci-dessus,  $\mathcal{R}$  est moyennable. Réciproquement, si une relation p.m.p. graphée et  $\Gamma$ -homogène  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est moyennable, alors  $\Gamma$  est moyennable.

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que  $G$  est moyennable. Soit  $E$  un espace de banach séparable, et  $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \text{Iso}(E)$  un cocycle mesurable. On considère  $x \mapsto K_x$  un champ mesurable<sup>(12)</sup> de  $w^*$ -compacts convexes de  $E^*$  tel que pour  $\nu$ -presque tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , on a  $(\alpha(x, y)^{-1})^*(K_y) = K_x$ . Le cocycle  $\alpha$  induit un cocycle  $\tilde{\alpha} : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \text{Iso}(E)$  par  $\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))$ , et un champ de  $w^*$ -compacts convexes de  $E^*$  par  $\tilde{x} \mapsto K_{\tilde{x}} = K_{\pi(\tilde{x})}$ . La relation  $\tilde{\mathcal{R}}$  étant moyennable, il existe  $\tilde{e} : \tilde{X} \rightarrow E^*$  borélienne telle que

$$\tilde{e}(\tilde{x}) \in K_{\tilde{x}}, \tilde{\mu}\text{-presque sûrement,}$$

$$(\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y})^{-1})^*(\tilde{e}(\tilde{y})) = \tilde{e}(\tilde{x}), \nu_G\text{-presque-sûrement.}$$

Considérons  $e : X \rightarrow E^*$  définie pour tout  $x \in X$  par  $e(x) = \int_K \tilde{e}(k\tilde{x}) dm_K(k)$ . Il est immédiat par les propriétés de l'intégration que  $e$  satisfait les conditions demandées.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{R}$  est moyennable. On utilise un théorème de Zimmer (cf. [Zim84], Proposition 4.3.3) : Si  $G$  agit librement p.m.p. sur  $X$  et  $(\mathcal{R}_G, \nu_G)$  est moyennable, alors  $G$  est moyennable. Il reste ainsi à montrer que  $\tilde{\mathcal{R}}$  est moyennable.

On note  $\tilde{\alpha}$  un cocycle mesurable de  $\tilde{\mathcal{R}}$  vers  $\text{Iso}(E)$  et soit  $\tilde{x} \mapsto K_{\tilde{x}}$  un champ mesurable de  $w^*$ -compacts convexes de  $E^*$ . Fixons une section mesurable  $s : X \rightarrow \tilde{X}$ . Comme dans la preuve du corollaire 1.7.1, il existe une application  $f : \tilde{X} \rightarrow$

11. Pour l'action duale, i.e.  $(\alpha(x, y)^{-1})^*(K_y) = K_x, \nu$ -presque sûrement

12. On entend par là que  $\{(x, K_x)\} \subset X \times E^*$  est un borélien.

$Iso(E)$  mesurable telle que le cocycle  $f(\tilde{x})\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y})f(\tilde{y})^{-1}$  soit constant sur les fibres, donnée par  $f(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}(s(\pi(\tilde{x})), \tilde{x})$  (en particulier, cela implique par l'équivariance que  $\tilde{\mu}$ -presque sûrement,  $(f^*(\tilde{x}))^{-1}(K_{\tilde{x}}) = K_{s(\pi(\tilde{x}))}$ , où il est entendu que  $f^*(\tilde{x}) = (f(\tilde{x}))^*$ ).

Par la moyennabilité de  $\mathcal{R}$ , on a l'existence d'une application borélienne  $e : X \rightarrow E^*$  telle que  $(\tilde{\alpha}(s(x), s(y))^{-1})^*(e(y)) = e(x)$ ,  $\nu$ -presque sûrement.

On a

$$\begin{aligned} f(\tilde{x})\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y})f(\tilde{y})^{-1} &= \tilde{\alpha}(s(\pi(\tilde{x})), s(\pi(\tilde{y}))), \text{ donc} \\ f^*(\tilde{x})^{-1}((\tilde{\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y}))^{-1})^*f^*(\tilde{y}) &= \tilde{\alpha}(s(\pi(\tilde{x})), s(\pi(\tilde{y}))) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $\tilde{e}(\tilde{x}) = f^*(\tilde{x})e(\tilde{x})$  pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , on obtient finalement une application borélienne qui vérifie les conditions (7) et (8) de la définition.  $\square$

Ainsi, l'hypothèse d'homogénéité pour un graphage est plutôt forte, puisque V. Kaimanovich a montré qu'il existe une relation p.m.p. non-moyennable munie d'un graphage localement fini dont les feuilles sont des graphes moyennables (voir [Kai97]).

**Remarque 1.8.1.** — *La première partie du corollaire serait aussi vraie dans le cadre plus général où la mesure  $\mu$  est seulement  $\mathcal{R}$ -quasi-invariante (et donc où le graphe transitif  $\Gamma$  n'est plus supposé unimodulaire, par la remarque 1.3.3). C'est a priori faux pour la seconde partie du corollaire.*

## 1.9. La propriété (H) de Haagerup

On étudie ici une troisième propriété, à l'opposé de la propriété (T) introduite plus haut, définie cette fois par U. Haagerup pour les groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts (voir définition 1.9.2 ci-dessous), puis définie par P. Jolissaint (cf. [Jol05] et la définition 1.9.4) pour les relations d'équivalence dénombrables standard p.m.p. (Voir aussi l'étude de cette propriété en toute généralité pour les groupoïdes mesurés [AD11].)

**Définition 1.9.1.** — *Soit  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  une application borélienne bornée. On dit que  $\phi$  est définie positive si, pour tout  $g_1, \dots, g_n \in G$  et tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , on a :*

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{\lambda}_i \lambda_j \phi(g_i^{-1} g_j) \geq 0.$$

**Définition 1.9.2.** — *On dit que  $G$  a la propriété (H) de Haagerup s'il existe une suite  $(\phi_n) : G \rightarrow \mathbb{C}$  de fonctions continues définies positives, normalisées (telles que  $\phi_n(1) = 1$ ) qui s'annulent à l'infini et convergent vers 1 uniformément sur les compacts.*

Comme précédemment, on est tentés de définir la propriété (H) pour un graphe transitif (unimodulaire) par la propriété correspondante de son groupe d'automorphismes. Cette définition est consistante avec les graphes de Cayley : Si  $\Lambda < \text{Aut}(\Gamma)$  est un réseau et possède la propriété (H), alors  $\text{Aut}(\Gamma)$  possède lui aussi la propriété (H) (voir la propriété 6.1.5 de [CCJ<sup>+</sup>01]).

On a le résultat suivant :

**Corollaire 1.9.1.** — *Si  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  est une relation graphée p.m.p.  $\Gamma$ -homogène et  $\Gamma$  possède la propriété (H) au sens ci-dessus, alors  $\mathcal{R}$  a la propriété (H).*

Comme on travaille dans un contexte mesuré, on ne fait pas de différence entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}|_A$  une restriction de  $\mathcal{R}$  à un borélien de mesure pleine. Les définitions ci-dessous sont celles de [Jol05] :

**Définition 1.9.3.** — *Soit  $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application borélienne bornée. On dit que  $\phi$  est définie positive si, pour tout  $x \in X$ , pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{R}[x]$  et tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , on a :*

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{\lambda}_i \lambda_j \phi(x_i, x_j) \geq 0.$$

**Définition 1.9.4** ([Jol05], **Definition 1.2**). — *Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  une relation d'équivalence p.m.p. à classes dénombrables. On dit que  $\mathcal{R}$  a la propriété (H) de Haagerup s'il existe une suite de fonctions définies positives  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  sur  $\mathcal{R}$  telle que :*

(a) *Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\nu(\{(x, y) \in \mathcal{R} \mid |\phi_n(x, y)| \geq \varepsilon\}) < \infty,$$

(b)  *$\phi_n|_\Delta \leq 1$  pour tout  $n$ ,*

(c)  *$\phi_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  pour  $\nu$ -presque tout  $(x, y) \in \mathcal{R}$ .*

Le lemme facile suivant prouve le corollaire 1.9.1 :

**Lemme 1.9.1.** — *Soit  $G$  un groupe localement compact unimodulaire, à base dénombrable d'ouverts qui possède la propriété (H), et soit  $K < G$  un sous-groupe compact ouvert. Soit  $G \curvearrowright (X, \mu)$  une action libre p.m.p. Alors la relation "réduite" définie sur  $K \backslash X$  (voir théorème 1.3.1) possède la propriété (H).*

*Démonstration.* — On se donne une suite  $\phi_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  d'application définies positives satisfaisant (a), (b), et (c) de la définition. On rappelle que la condition (b) permet de supposer que  $\sup_{\mathcal{R}} |\phi_n(x, y)| \leq 1$  pour tout  $n$  (cf. [BdLHV08], Proposition C.1.2). On définit le morphisme  $\sigma : \mathcal{R}_G \rightarrow G$  par

$$\sigma(x, y) = \text{l'unique } g \in G \text{ tel que } y = gx.$$

Considérons la suite de fonctions (clairement boréliennes)  $\bar{\phi}_n : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\bar{\phi}_n(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{K \times K} \phi_n(\sigma(kx, k'y)) dm_{K \times K}(k, k'),$$

pour un certain choix de section mesurable  $\bar{x} \mapsto x$ .

- (i) On vérifie la condition que  $\bar{\phi}_n$  est définie positive : Fixons  $x \in X$  et  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in \bar{\mathcal{R}}[\bar{x}]$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  (pour un certain entier  $m$ ).

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \bar{\phi}_n(\bar{x}_i, \bar{x}_j) &= \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \int_{K \times K} \phi_n(\sigma(kx_i, k'x_j)) dm_{K \times K}(k, k') \\ &= \int_{K \times K} \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \phi_n(\sigma(kx_i, x) \sigma(x, k'y_j)) dm_{K \times K}(k, k') \\ &\geq 0 \text{ car } \phi_n \text{ est définie positive.} \end{aligned}$$

- (ii) On vérifie la condition (a) : Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  fixés, et soit  $K_\varepsilon \subset G$  compact tel que  $\phi_n(g) < \varepsilon$  pour tout  $g \in G \setminus K_\varepsilon$ . On pose  $K'_\varepsilon = KK_\varepsilon K$  qui est un compact de  $G$  et qui contient  $K$  et  $K_\varepsilon$ . De plus, comme  $K$  est un sous-groupe, on a pour tout  $(x, y) \in \mathcal{R}_G$  :

$$\forall k, k' \in K, \sigma(kx, k'y) \in K'_\varepsilon \iff \sigma(x, y) \in K'_\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\mathcal{R}} | \bar{\phi}_n(\bar{x}, \bar{y}) \geq \varepsilon\} \subset \{(\bar{x}, \bar{g}\bar{x}) \in \bar{\mathcal{R}} | x \in X, g \in K'_\varepsilon\}.$$

Or, par unimodularité de  $G$  (voir le calcul du lemme 1.3.4 et la remarque 1.3.4 qui le suit) :

$$\bar{\nu}(\{(\bar{x}, \bar{g}\bar{x}) \in \bar{\mathcal{R}} | x \in X, g \in K'_\varepsilon\}) = \nu_G(\{(x, gx) \in \mathcal{R} | x \in X, g \in K'_\varepsilon\}) < +\infty,$$

d'où le résultat.

- (iii) Les conditions (b) et (c) sont aisées à vérifier, ce qui termine la démonstration du lemme. □

On a aussi une réciproque (comme on l'a fait pour la propriété (T)) au corollaire 1.9.1<sup>(13)</sup> :

**Proposition 1.9.1.** — *Soit  $(\mathcal{R}, X, \mu, \mathcal{G})$  une relation p.m.p. graphée et  $\Gamma$ -homogène qui possède la propriété (H). Alors le graphe  $\Gamma$  possède la propriété (H).*

13. On pourrait très certainement utiliser de nouveau ici la bijection entre  $H^1(\mathcal{R}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$  et  $H^1(\tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{U}(\mathcal{H}))$ , à condition d'établir une définition équivalente à la définition 1.9.4 de la propriété (H) en termes de représentations hilbertiennes pour une relation d'équivalence mesurée discrète ou continue. On ne fait pas ce choix ici, on démontre "à la main" le résultat.



*Démonstration.* — Posons  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies positives sur  $\mathcal{R}$  vérifiant (a), (b) et (c). On rappelle de nouveau que par (b), la suite  $(\phi_n)$  est uniformément bornée par 1. On considère le revêtement  $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{X}, \tilde{\mu})$  construit au théorème 1.3.2. Soit  $\tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi_n(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))$ , pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On pose enfin

$$\Phi_n(g) = \int_{\tilde{X}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, g\tilde{x}) d\tilde{\mu}(\tilde{x}), \text{ pour tout } g \in G.$$

- (i) On s'assure que  $\Phi_n$  est définie positive. Soient  $g_1, \dots, g_m \in G$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \Phi_n(g_i^{-1} g_j) &= \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \int_{\tilde{X}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, g_i^{-1} g_j \tilde{x}) d\tilde{\mu}(\tilde{x}) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \int_{\tilde{X}} \tilde{\phi}_n(g_j^{-1} \tilde{x}, g_i^{-1} \tilde{x}) d\tilde{\mu}(\tilde{x}) \\ &= \int_{\tilde{X}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^m \bar{\lambda}_i \lambda_j \phi_n(\pi(g_j^{-1} \tilde{x}), \pi(g_i^{-1}(\tilde{x})))}_{\geq 0} d\tilde{\mu}(\tilde{x}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De plus, on vérifie aisément que pour tout  $k \in K$ ,  $\Phi_n(kg) = \Phi_n(g)$  donc  $\Phi_n$  est localement constante sur  $G$  donc continue.

- (ii) Vérifions que  $\Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  uniformément sur les compacts : Soit  $L \subset G$  une partie compacte et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe par compacité un ensemble fini  $\{g_1, \dots, g_n\}$  tel que  $L \subset \cup_i g_i K$ . Comme les fonctions  $\Phi_n$  sont  $K$ -invariantes, la convergence uniforme sur les compacts est donc équivalente à la convergence simple. Pour  $g \in G$  fixé, on a

$$\Phi_n(g) = \int_{\tilde{X}} \phi_n(\pi(\tilde{x}), \pi(g\tilde{x})) d\tilde{\mu}(\tilde{x}),$$

le résultat s'ensuit par convergence dominée de Lebesgue (c'est la condition (c) pour la suite  $(\phi_n)$ , couplée avec le fait que  $\pi \times \pi$  envoie  $\nu_G$  sur  $\nu$ ).

- (iii) Vérifions enfin le caractère  $c_0$  de  $\Phi_n$  pour  $n$  fixé. Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} := \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{R}} \mid |\tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y})| \geq \varepsilon\}.$$

Par l'hypothèse (a) sur  $\phi_n$ ,  $\nu_G(\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n}) < +\infty$ . Soit  $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$  une exhaustion croissante de  $G$  par des compacts. Il existe un certain entier  $l_0$  tel que

$$(9) \quad \nu_G(\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \cap (X \times K_{l_0})) < \varepsilon.$$

Pour tout  $g \in G$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, g\tilde{x}) &\leq \varepsilon \text{ si } (\tilde{x}, g\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{R}} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \\ &\leq 1 \text{ si } (\tilde{x}, g\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \end{aligned}$$

En particulier, pour  $g \in G \setminus K_{l_0}$  et en notant  $L_g = \{(\tilde{x}, g\tilde{x}) | \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ , on a par la majoration en (9) :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{X}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, g\tilde{x}) d\tilde{\mu}(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{\mathcal{R}}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \chi_{L_g} d\nu_G(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \chi_{L_g} d\nu_G(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_{\tilde{\mathcal{R}} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n}} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \chi_{L_g} d\nu_G(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n} \cap (X \times K_{l_0})} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \chi_{L_g} d\nu_G(\tilde{x}, \tilde{y}) + \\ &\quad \int_{L_g \cap (\tilde{\mathcal{R}} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,n})} \tilde{\phi}_n(\tilde{x}, \tilde{y}) d\nu_G(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.9.1.** — On pourrait élargir le cadre de la définition 1.9.4 de la propriété (H) dans le cadre d'une relation d'équivalence p.m.p. mesurée à orbites continues (i.e. dont les mesures dans les fibres sont continues). Dans ce cadre plus général, il suffit de reprendre mot à mot la définition d'une fonction de type positif et la définition de la propriété (H) qui a été donnée en 1.9.4. Si l'on considère une certaine action mesurable libre p.m.p. d'un groupe (localement compact, à base dénombrable d'ouverts)  $G$  et  $\mathcal{R}_G$  la relation d'équivalence mesurée induite, alors le même type d'arguments que ci-dessus donne l'équivalence entre :  $G$  a la propriété (H) et  $\mathcal{R}_G$  a la propriété (H).

### 1.10. Une extension de l'équivalence mesurée

On a évoqué la généralisation d'un couplage de  $ME$  aux groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts et unimodulaires. On donne quelques précisions ci-dessous (cf. [Fur09], Définition 2.1.(d)) :

Un espace de couplage entre  $G$  et  $H$  comme ci-dessus est un espace (borélien standard) mesuré  $(\Omega, m)$  tel qu'il existe :

- (i) Deux actions lisses, libres,  $G \curvearrowright (\Omega, m) \curvearrowright H$  qui commutent et préservent la mesure  $m$ .

- (ii) Deux mesures *finies*  $\mu, \nu$  et deux isomorphismes boréliens  $G$ -équivariants (pour la multiplication à gauche par  $G$  sur la première coordonnée d'une part, et l'action de  $G$  sur  $\Omega$  d'autre part)  $i, j$  tels que

$$i : (G, m_G) \times (G \backslash \Omega, \nu) \simeq (\Omega, m), \quad j : (H, m_H) \times (\Omega/H, \mu) \simeq (\Omega, m).$$

L'intérêt d'une telle généralisation est d'autoriser par exemple les couplages entre un groupe de Lie et un réseau de ce groupe de Lie, tout en gardant à l'idée que la relation de  $ME$  ainsi définie est toujours transitive (voir par exemple [Fur09], Définition 2.1.(c)).

**Remarque 1.10.1.** — On pourrait définir un couplage de  $ME$  sans l'hypothèse d'unimodularité sur les groupes  $G_1, G_2$ , et alors on prendrait  $m_{G_1}$  la mesure de Haar invariante à gauche, et  $m_{G_2}$  la mesure de Haar invariante à droite. Cependant, pour un groupe unimodulaire  $G$ , on a systématiquement  $G \stackrel{ME}{\sim} G$ , et de plus l'unimodularité sera utilisée au lemme 1.10.1(i).

On a remarqué (mais c'est une conséquence de [FM77], Theorem 3) à la fin de la section 1.6 le fait suivant :

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux graphes transitifs unimodulaires, et  $G_1, G_2$  leurs groupes d'automorphismes respectifs. Si  $G_1 \stackrel{OE}{\sim} G_2$  (i.e. s'il existe  $G_i \curvearrowright (X_i, \mu_i)$  deux actions libres p.m.p. et une équivalence orbitale entre  $\mathcal{R}(G_1 \curvearrowright X_1)$  et  $\mathcal{R}(G_2 \curvearrowright X_2)$ ), alors  $\overline{\mathcal{R}}_1 \stackrel{SOE}{\sim} \overline{\mathcal{R}}_2$  (où les relations p.m.p.  $\overline{\mathcal{R}}_i$  sont obtenues en passant au quotient par  $K_i$  comme au théorème 1.3.1).

En notant qu'avec l'hypothèse plus faible de l'existence d'un couplage de  $ME$  entre  $G_1$  et  $G_2$ , la même démonstration (ou presque) que dans la proposition 1.6.1 donne le même résultat (voir la proposition 1.10.2 ci-dessous), cela donne l'idée suivante pour une définition d'équivalence mesurée entre *graphes transitifs unimodulaires* :

**Définition 1.10.1.** — Deux graphes transitifs  $\Gamma_1, \Gamma_2$  sont dits *mesurablement équivalents* si leurs groupes d'automorphismes respectifs sont  $ME$ .

Cette définition est cohérente avec le cas des graphes de Cayley : si  $\Gamma_i = \text{Cay}(\Lambda_i)$  sont deux graphes de Cayley, tout couplage entre  $\text{Aut}(\Gamma_1)$  et  $\text{Aut}(\Gamma_2)$  induit un couplage entre les réseaux  $\Lambda_i$  correspondants. L'invariance de la propriété (T), de la moyennabilité et de la propriété (H) par équivalence mesurée (voir [Fur09], Section 3.1.1 pour un résumé assez détaillé) implique que ces propriétés que nous avons définies plus haut pour les graphes sont elles-mêmes invariantes par cette nouvelle notion de  $ME$ . Cependant, on obtient ci-dessous (toujours en conséquence de [FM77], Theorem 3) la caractérisation plus "géométrique" suivante :

**Proposition 1.10.1.** — Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux graphes transitifs (infinis, connexes, localement finis) unimodulaires. Alors on a équivalence entre :

$$(i) \quad \text{Aut}(\Gamma_1) \stackrel{ME}{\sim} \text{Aut}(\Gamma_2).$$

- (ii) Il existe une relation ergodique p.m.p. graphée  $(\mathcal{R}_1, X_1, \mu_1, \mathcal{G}_1)$  qui est  $\Gamma_1$ -homogène, une relation ergodique p.m.p. graphée  $(\mathcal{R}_2, X_2, \mu_2, \mathcal{G}_2)$  qui est  $\Gamma_2$ -homogène et une SOE entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .

Pour deux groupes  $G_1, G_2$  localement compacts, unimodulaires, à base dénombrable d'ouverts, et un couplage d'équivalence mesurée  $G_1 \curvearrowright (\Omega, m) \curvearrowleft G_2$ , on note comme dans la définition :

$$(10) \quad i_1 : (G_1, m_{G_1}) \times (G_1 \backslash \Omega, \mu_2) \simeq (\Omega, m), \quad i_2 : (G_2, m_{G_2}) \times (\Omega/G_2, \mu_1) \simeq (\Omega, m).$$

Le lemme suivant fait le lien entre ME et OE dans le cas des groupes localement compacts (qui possèdent au moins un sous-groupe compact ouvert)

Dans la suite des calculs, on notera indifféremment  $\Omega/G_2$  ou  $X_1$  (resp.  $G_1 \backslash \Omega$  ou  $X_2$ ) pour ne pas alourdir les notations. :

**Lemme 1.10.1.** — Soient  $G_1, G_2$  deux groupes (infinis) topologiques localement compacts, unimodulaires et à base dénombrable d'ouverts. On suppose qu'il existe  $(\Omega, m)$  un couplage de ME entre  $G_1$  et  $G_2$ .

(i) L'action de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) sur  $(X_1, \mu_1)$  (resp.  $(X_2, \mu_2)$ ) préserve la mesure.

(ii) De plus, si l'action de  $G_1 \times G_2$  sur  $\Omega$  est ergodique, alors l'action de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) sur  $(X_1, \mu_1)$  (resp.  $(X_2, \mu_2)$ ) est ergodique.

(iii) Enfin, si  $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2)$ , si  $G_1, G_2$  possèdent au moins un sous-groupe compact ouvert (notés  $K_1, K_2$  respectivement) et les mesures de Haar sont continues, alors  $G_1 \stackrel{OE}{\sim} G_2$ .

*Démonstration.* — (i) : On va montrer que  $G_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$  préserve la mesure, il en va exactement de même pour  $(X_2, \mu_2) \curvearrowleft G_2$ . L'application

$$s : X_1 = \Omega \backslash G_2 \rightarrow \Omega \text{ définie par } s(x) = i_2(1, x), \text{ (voir (10))}$$

est une section borélienne de la projection canonique  $\Omega \rightarrow \Omega \backslash G_2$ . On peut définir ainsi un cocycle  $\alpha : X_1 \times G_1 \rightarrow G_2$  par

$$\alpha(x, g) = \text{l'unique } \gamma \in G_2 \text{ tel que } gs(x)\gamma \in s(X_1).$$

L'action de  $G_1$  sur  $X_1 \times G_2$  s'écrit donc pour tout  $h \in G_1, x \in X_1$ , et tout  $\gamma \in G_2$  :

$$h \cdot (x, \gamma) = (hx\alpha(x, h), \alpha(x, h)^{-1}\gamma).$$

On note  $\odot$  l'action de  $G_1$  sur  $X_1$  dans le calcul ci-dessous. Fixons pour le calcul  $h \in G_1$ . Pour toute fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne bornée, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\omega) dm(\omega) &= \int_{\Omega} f(h\omega) dm(\omega) \\ &= \int_{G_2} \left( \int_{X_1} f(h \cdot (x, \gamma)) d\mu_1(x) \right) dm_{G_2}(\gamma) \\ &= \int_{G_2} \left( \int_{X_1} f(h \odot x, \alpha(h, x)^{-1}\gamma) d\mu_1(x) \right) dm_{G_2}(\gamma) \\ &= \int_{X_1} \left( \int_{G_2} f(h \odot x, \gamma) dm_{G_2}(\gamma) \right) d\mu_1(x) \text{ (par unimodularité).} \end{aligned}$$

Soit finalement, en utilisant de nouveau le théorème de Fubini, pour toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $X_1 \times G_2$  :

$$\int_{G_2} \left( \int_{X_1} f(x, \gamma) d(h_*\mu_1)(x) \right) dm_{G_2}(\gamma) = \int_{G_2} \left( \int_{X_1} f(x, \gamma) d\mu_1(x) \right) dm_{G_2}(\gamma).$$

Il s'ensuit  $h_*\mu_1 = \mu_1$ , pour tout  $h \in G_1$ .

(ii) : Soit  $A \subset X_1$  un borélien  $G_1$ -invariant. Le borélien  $A \times G_2 \subset \Omega$  est  $(G_1 \times G_2)$ -invariant donc de  $m$ -mesure pleine ou de complémentaire de  $m$ -mesure pleine, ce qui implique  $\mu_1(A) = 0$  ou  $\mu_1(A) = 1$ .

(iii) : On a vu en (i) et (ii) que la relation  $\mathcal{R}(G_1 \curvearrowright \Omega/G_2)$  (resp.  $\mathcal{R}(G_1 \backslash \Omega \curvearrowright G_2)$ ) était p.m.p. et ergodique, donc comme au théorème 1.3.1, la relation  $\overline{\mathcal{R}}_1$  (resp.  $\overline{\mathcal{R}}_2$ ) réduite obtenue au quotient  $K_1 \backslash \Omega/G_2$  (resp.  $G_1 \backslash \Omega/K_2$ ) est p.m.p., à classes dénombrables (car  $K_1, K_2$  sont ouverts) et ergodique pour la mesure (finie)  $\bar{\mu}_1$  (resp.  $\bar{\mu}_2$ ). Il en est de même de la relation réduite de  $\mathcal{R}_{G_1 \times G_2}$  sur l'espace  $K_1 \backslash \Omega/K_2$  pour la mesure  $\overline{m}$  (infinie). Par l'intermédiaire d'un choix de sections boréliennes, il y a des inclusions naturelles entre ces différents espaces (et la restriction de  $\overline{m}$  aux sous-espaces concernés y coïncide respectivement avec les mesures  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ ) :

$$\begin{aligned} (K_1 \backslash \Omega/G_2, \bar{\mu}_1) &\subset (K_1 \backslash \Omega/K_2, \overline{m}); \\ (G_1 \backslash \Omega/K_2, \bar{\mu}_2) &\subset (K_1 \backslash \Omega/K_2, \overline{m}). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a donc

$$\overline{m}(K_1 \backslash \Omega/G_2) = \overline{m}(G_1 \backslash \Omega/K_2).$$

Par ergodicité de  $\overline{\mathcal{R}}_{G_1 \times G_2}$ , il existe donc  $\phi \in [[\overline{\mathcal{R}}_{G_1 \times G_2}]]$  tel que  $\phi(K_1 \backslash \Omega/G_2) = G_1 \backslash \Omega/K_2$  (cf. par exemple [KM04], Lemma 7.10). Il est aisé de vérifier que

$\phi$  est un isomorphisme entre  $\overline{\mathcal{R}}_1$  et  $\overline{\mathcal{R}}_2$ ; on peut donc supposer  $\overline{\mathcal{R}}_1 = \overline{\mathcal{R}}_2 = \overline{\mathcal{R}}$  et l'on obtient

$$\mathcal{R}(G_1 \curvearrowright X_1) \stackrel{OE}{\sim} \mathcal{R}(X_2 \curvearrowright G_2) \stackrel{OE}{\sim} \overline{\mathcal{R}} \times \mathcal{I}.$$

□

Une conséquence (ou un cas particulier) de la démonstration du point (iii) du lemme ci-dessus est la proposition suivante (où l'on a gardé les mêmes notations que dans le lemme 1.10.1) :

**Proposition 1.10.2.** — *Soient  $G_1, G_2$  deux groupes localement compacts, unimodulaires, à base dénombrable d'ouverts et soient  $K_1, K_2$  des sous-groupes compacts ouverts de  $G_1, G_2$  respectivement.*

*Si  $G_1 \stackrel{ME}{\sim} G_2$ , alors la relation  $\overline{\mathcal{R}}_1$  obtenue sur le quotient  $K_1 \backslash X_1$  est SOE avec la relation  $\overline{\mathcal{R}}_2$  obtenue sur le quotient  $X_2/K_2$ .*

**Remarque 1.10.2.** — *On ne demande pas ici que les mesures de Haar soient simultanément atomiques ou non-atomiques. Les relations "réduites" (qui vivent dans  $K_1 \backslash \Omega/K_2$  dans la démonstration ci-dessus) sont de toutes façons à classes dénombrables.*

*Le résultat de la proposition 1.10.2 ne dépend pas non plus des sous-groupes compacts ouverts  $K_1, K_2$  que l'on a choisis.*

Revenons désormais au cas particulier des groupes d'automorphismes de graphes et à la preuve de la proposition 1.10.1 :

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux graphes transitifs (connexes, infinis et localement finis) unimodulaires et  $G_1, G_2$  leurs groupes d'automorphismes (et  $K_1, K_2$  désignent toujours les stabilisateurs d'un sommet particulier de  $\Gamma_1, \Gamma_2$  respectivement). Supposons qu'il existe un couplage de ME entre  $G_1$  et  $G_2$  : la relation  $\overline{\mathcal{R}}_1$  sur  $K_1 \backslash X_1$  est naturellement graphée de façon  $\Gamma_1$ -homogène (voir la remarque 1.3.3), et  $\overline{\mathcal{R}}_2$  sur  $X_2/K_2$  est graphée de façon  $\Gamma_2$ -homogène, ce qui termine la preuve de (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Réciproquement pour montrer (ii)  $\Rightarrow$  (i), si  $(\mathcal{R}_i, X_i, \mu_i, \mathcal{G}_i), i = 1, 2$  sont deux relations p.m.p. graphées respectivement  $\Gamma_i$ -homogènes et  $\phi \times \phi : (\mathcal{R}_1)_{|A_1} \rightarrow (\mathcal{R}_2)_{|A_2}$  une SOE, alors considère l'espace mesuré

$$X_1 \sqcup X_2 / (A_1 \stackrel{\phi}{\simeq} A_2),$$

formé des copies de  $X_1$  et  $X_2$  où  $A_1$  est identifié à  $A_2$  par  $\phi$  (muni de la mesure finie qui vaut  $\mu_1/\mu_1(A_1)$  sur  $X_1$  et  $\mu_2/\mu_2(A_2)$  sur  $X_2$ ) et la relation  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$  (on suit encore à ce niveau la preuve dans le cas discret de [Fur99b], Proposition 2.3).

En considérant la relation amplifiée  $\mathcal{R} \times \mathcal{I}$ , puis sa restriction à  $(X_1 \times [0, 1]) \times (X_2 \times [0, 1])$ , on obtient un espace de couplage entre  $G_1$  et  $G_2$  en procédant comme suit. On distingue deux cas :

- a) Si  $K_1, K_2$  sont infinis, alors il existe des isomorphismes mesurés  $K_i \simeq [0, 1]$  et l'on définit ainsi une action (libre, p.m.p.) de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) sur  $X_1 \times [0, 1]$  (resp.  $X_2 \times [0, 1]$ ).
- b) Si par exemple  $K_2$  est fini et  $K_1$  infini, alors on relève l'action (libre, p.m.p.) de  $G_2 \curvearrowright X_2 \times K_2$  à  $G_2 \curvearrowright X_2 \times [0, 1]$  par permutations d'intervalles.

### 1.11. Appendice

On illustre ci-dessous la remarque de l'introduction en donnant concrètement un exemple de champ de droites qui n'est pas obtenu à partir de l'action d'un automorphisme. C'est une autre version de l'exemple de Kechris et Miller (*cf.* [KM04], Remark 6.8). La question dans sa forme générale est discutée dans l'article [CK10] (Section 5) : Étant donné un graphe borélien biparti (*i.e.* il existe une partition borélienne des sommets  $\Gamma^{(0)} = X_1 \sqcup X_2$  telle que deux extrémités d'une arête ne sont jamais dans le même  $X_i$ ) et disons de valence fixée  $k \geq 2$ , existe-t-il toujours  $\varphi$  un isomorphisme borélien de l'espace (ou de  $X_1$  vers  $X_2$ ) tel que  $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{G}$  pour tout  $x \in X$  ? S'il existe un tel automorphisme, il est appelé un "*Borel Matching*". En fait, on connaissait justement la réponse négative pour un champ de droites ( $k = 2$ ) depuis [Lac88]. Cet exemple est généralisé dans [CK10] aux graphes de valence  $2n$ , mais la question reste ouverte pour toute valence impaire.

**Exemple 1.11.1.** — Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
Soit

$$\begin{aligned} r_\alpha \curvearrowright S^1, & \text{ action ergodique de } \mathbb{Z} \text{ sur } S^1 \text{ par rotation irrationnelle} \\ \sigma \curvearrowright S^1, & \text{ symétrie d'axe pôle } N/\text{pôle } S. \end{aligned}$$

Posons  $\mathcal{R} := \langle r_\alpha, \sigma \rangle$  la relation d'équivalence engendrée par  $r_\alpha$  et  $\sigma$  sur  $S^1$ . On a une relation d'anticommutativité puisque  $\sigma \circ r_\alpha = r_\alpha^{-1} \circ \sigma$  sur  $S^1$ . Grâce à cette relation, on peut définir une notion de "voisin" sur l'espace quotient  $S^1 / \langle \sigma \rangle$  (cet espace est encore un borélien standard) :

$$[x]_\sigma \mathcal{G} [y]_\sigma \iff \exists \epsilon \in \{0, 1\}, x = \sigma^\epsilon \circ r_\alpha^{\pm 1}(y).$$

On vérifie aisément que chaque  $[x]_\sigma$  (privé des orbites du pôle  $N$  et du pôle  $S$ ) possède exactement deux voisins pour  $\mathcal{G}$ . Supposons qu'il existe une action de  $\mathbb{Z}$  qui induise ce graphage. On note  $\tau \in \text{Aut}(S^1 / \langle \sigma \rangle)$  un générateur de la relation.

Considérons

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in S^1 \mid [r_\alpha(x)] = \tau[x]\} \\ B &:= \{x \in S^1 \mid [r_\alpha(x)] = \tau^{-1}[x]\}. \end{aligned}$$

– D'une part,

$$\forall x \in S^1, [r_\alpha(x)] \mathcal{G} [x],$$

donc  $A \sqcup B = S^1$ .

– D'autre part,  $A$  est  $r_\alpha$ -invariant, car  $((x \in A) \text{ et } (r_\alpha(x) \notin A)) \Rightarrow (\sigma(x) = r_\alpha^2(x))$  (impossible). Il en va de même pour  $B$ .

Par ailleurs, si  $[r_\alpha(x)] = \tau[x]$ , alors

$$[r_\alpha \circ \sigma(x)] = [\sigma \circ r_\alpha^{-1}(x)] = [r_\alpha^{-1}(x)] = \tau^{-1}([x]);$$

donc

$$x \in A \iff \sigma(x) \in B, \text{ pour presque tout } x \in S^1.$$

Ainsi,  $B = \sigma A$  et

$$S^1 = A \sqcup \sigma A \text{ et } \mu(A) = \mu(\sigma A) = \frac{1}{2},$$

ce qui est impossible par ergodicité de  $r_\alpha$ .

Une question plus générale concerne l'homogénéisation des graphages mesurés, i.e. si  $\mathcal{G}$  est un graphage de coût  $n$  (qui induit une certaine relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ ), existe-t-il un graphage  $\mathcal{G}'$  (qui graphe la même relation  $\mathcal{R}$ ) de valence uniforme  $2n$  ?

- (i) Oui, si la relation est ergodique et n'est pas *arborable* (i.e. n'admet pas un graphage qui est un arborage) : C'est essentiellement le contenu du lemme 27.7 de [KM04], attribué à Hjorth-Kechris. La preuve de ce fait repose sur la proposition suivante que l'on admet :

**Proposition 1.11.1.** — (voir [Gab00] ou [KM04], Lemma 23.1) Soit  $\mathcal{R}_0 \subset (\mathcal{R}, X, \mu)$  une sous-relation hyperfinie, et  $\mathcal{G}_0$  un arborage de  $\mathcal{R}_0$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un (sur-)graphage  $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_0$  de  $\mathcal{R}$  tel que  $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{G}) \leq \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) + \epsilon$ .

En effet, il s'ensuit que si  $\mathcal{G}$  est un graphage de coût entier de  $\mathcal{R}$  supposée ergodique, vérifiant  $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{G}) < \mathcal{C}_\mu(\mathcal{R}) + \epsilon$ , alors il existe  $\mathcal{G}' = (\phi_1, \phi_2, \dots)$  tel que  $\phi_1$  agit ergodiquement sur  $X$  et  $\mathcal{C}_\mu(\mathcal{G}) = \mathcal{C}_\mu(\mathcal{G}')$ . On peut alors homogénéiser  $\mathcal{G}'$  "à la main" pour obtenir le graphage  $\Gamma''$  de valence  $2n$  demandé :

*Démonstration.* — La relation  $\mathcal{R}_{\phi_1}$  étant ergodique, pour tous boréliens  $A, B$  de même mesure, il existe  $\phi \in [[\mathcal{R}_{\phi_1}]]$  telle que  $\phi(A) = B$ . Il s'ensuit que si l'on note  $\tilde{\phi}_k$  un conjugué de  $\phi_k \in \mathcal{G}$  par un élément particulier de  $[[\mathcal{R}_{\phi_1}]]$ , alors le graphage  $\mathcal{G}^{(1)} := \{\phi_1, \phi_2, \tilde{\phi}_3, \dots, \phi_n, \dots\}$  engendre toujours  $\mathcal{R}$ , et pour un élément bien choisi de  $[[\mathcal{R}_{\phi_1}]]$ , on a  $\text{dom}(\phi_2) \cap \text{dom}(\tilde{\phi}_3) = \emptyset$ .

Continuant ainsi, il existe un graphage  $\mathcal{G}^{(k_1)}$  qui engendre  $\mathcal{R}$  et tel que la réunion disjointe des  $\text{dom}(\tilde{\phi}_i)$  pour  $1 < i \leq k_1$  est égale à  $X$ .<sup>(14)</sup> pour les indices supérieurs à  $k_1 + 1$ , on recommence la même construction jusqu'à l'étape

14. Pour ce faire, on éventuellement subdivisé le domaine de  $\phi_k$ .



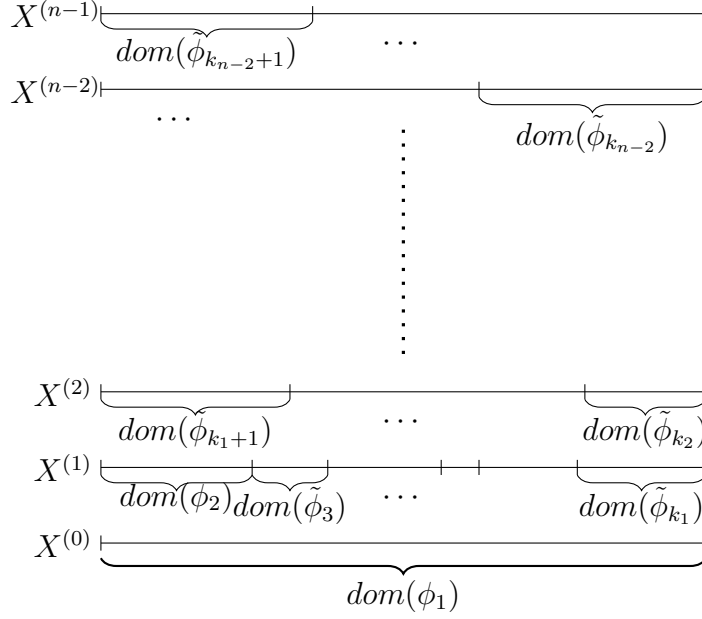


FIGURE 2. Homogénéisation d'un graphage

$k_2$  pour obtenir un graphage  $\mathcal{G}^{(2)}$  qui engendre  $\mathcal{R}$  et tel que la réunion disjointe des  $\text{dom}(\tilde{\phi}_i)$  pour  $k_1 < i \leq k_2$  est égale à  $X$ , et ainsi de suite jusqu'à l'étape  $k_{n-1}$  où l'on a éventuellement considéré un nombre infini d'isomorphismes partiels. Il est aisé de voir que la graphage  $\mathcal{G}^{(k_{n-1})}$  engendre  $\mathcal{R}$  et est de valence homogène  $2n$ .  $\square$

- (ii) Enfin, le théorème de Hjorth cité sur les relations *arborées* de coût entier nous dit que l'on peut homogénéiser le graphage dans ce cas.

### 1.12. Questions annexes

La réflexion suivante ne semble pas sans lien avec le sujet de la thèse et pourtant je n'ai pas trouvé de moyen de l'inclure avec le reste du texte. C'est l'objet de cette section supplémentaire où par ailleurs on ne détaille pas autant les calculs que dans le reste du mémoire.

On considère  $(\mathcal{G}, \pi)$  un champ de graphes borélien sur  $X$  (à fibres dénombrables). Par le théorème de Lusin-Novikov, on peut montrer qu'il existe une *numérotation borélienne* des sommets de chaque fibre (*i.e.* pour tout  $x \in X$  une bijection  $\phi_x$  entre les sommets de  $\pi^{-1}(x)$  et  $\mathbb{N}$ ). On transporte ainsi la structure de graphe de  $\mathcal{G}$  sur  $X \times \mathbb{N}$ . On note  $\widehat{\mathcal{G}}$  le champ de graphes boréliens fibré sur  $X$  nouvellement obtenu dont les sommets sont une partie de  $X \times \mathbb{N}$ , et on appelle  $\phi$  l'isomorphisme  $\mathcal{G} \rightarrow \widehat{\mathcal{G}}$ . En d'autres termes le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\phi} & \widehat{\mathcal{G}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ X & \xrightarrow{Id} & X \end{array}$$

(où  $\hat{\pi} : \widehat{\mathcal{G}} \subset X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la (restriction de la) projection sur la première coordonnée.)

On note  $\mathcal{G}_x$  les fibres de  $\pi$ , qui sont des graphes supposés localement dénombrables. Considérons les fonctions booléennes suivantes :

$$\begin{aligned} f_{transitif} : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{G}_x \text{ est transitif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Cayley} : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{G}_x \text{ est un graphe de Cayley} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Est-ce que  $f_{transitif}$ ,  $f_{Cayley}$  sont boréliennes ?  $(\mu)$ -mesurables ?

Le champ de graphes  $\mathcal{G}$  induit un "champ de groupes"  $x \mapsto G_x := \text{Aut}(\mathcal{G}_x)$ . On souhaite donner une structure borélienne à ce champ de groupes. On considère donc plutôt le champ de groupes  $x \mapsto \widehat{G}_x = \text{Aut}(\widehat{\mathcal{G}}_x)$  associé au champ de graphes  $\widehat{\mathcal{G}}$ . Pour tout  $x \in X$ , la conjugaison par  $\phi_x$  (notée  $Ad_{\phi_x}$  dans le diagramme ci-dessous) envoie  $G_x$  sur  $\widehat{G}_x$ , qui est un sous-groupe fermé de  $\text{Bij}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$  (noté canoniquement  $\mathcal{S}_\infty$  dans la suite), en faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{x \in X} \{G_x\} & \xhookrightarrow{\{Ad_{\phi_x}\}_{x \in X}} & X \times \mathcal{S}_\infty \\
\downarrow \text{proj}_X & & \downarrow \text{proj}_1 \\
X & \xrightarrow{Id} & X
\end{array}$$

L'image de  $\coprod_{x \in X} \{G_x\}$  par  $Ad_\phi$  est un borélien de  $X \times \mathcal{S}_\infty$  ainsi qu'on le vérifie facilement. Dans la suite, on note  $s$  une section borélienne de  $\hat{\pi}$ . A nouveau, on vérifie facilement que l'ensemble

$$\{(x, \hat{G}_x \cdot s(x)) | x \in X\} \subset X \times \mathbb{N}$$

est une partie borélienne de  $\hat{\mathcal{G}}$ .

Considérons le borélien de  $X \times \mathbb{N}$  suivant (où on a noté par  $\Delta$  l'opération *différence symétrique*) :

$$A := \{(x, \hat{\mathcal{G}}_x \Delta (\hat{G}_x \cdot s(x))) | x \in X\}.$$

Le projeté de  $A$  sur  $X$  est un borélien (conséquence du théorème de Lusin), et nous donne le lieu des zéros de  $f_{\text{transitif}}$ .

Considérons l'ensemble  $\text{Subg}(\text{Aut}(\Gamma))$  des sous-groupes fermés de  $\text{Aut}(\Gamma)$  lorsque  $\Gamma$  est un graphe dénombrable. On rappelle que  $\text{Aut}(\Gamma)$  est muni de la topologie de la convergence simple, ce qui en fait un groupe topologique polonais. On le note  $G$  dans la suite. Par un théorème de Kuratowski-Ryll-Nardzewski (voir [Kec95] 12.13), l'ensemble des sous-groupes fermés est une partie borélienne de l'ensemble des fermés de  $G$ -noté  $F(G)$  (autrement appelé *l'espace d'Effros*, lui même borélien standard), muni de la tribu engendrée par les ensembles :

$$\{F \in F(G) | F \cap U \neq \emptyset\}$$

où  $U$  parcourt les ouverts de  $G$ . Soit  $v_0$  un sommet de  $\Gamma$  fixé. L'application

$$\left( \begin{array}{ccc} \tau : \text{Subg}(\text{Aut}(\Gamma)) & \rightarrow & 2^{\Gamma^{(0)}} \\ H & \mapsto & H \cdot v_0 \end{array} \right)$$

est borélienne, donc les sous-groupes fermés de  $G$  qui agissent transitivement sur  $\Gamma$  forment un espace borélien standard pour la tribu ci-dessus. On note cet espace  $\text{Trans}(\Gamma)$ . L'application suivante :

$$\left( \begin{array}{ccc} \psi : \text{Trans}(\Gamma) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ H & \mapsto & \inf_{h \in H \setminus \{id\}} d_\Gamma(hv_0, v_0) \end{array} \right)$$

est borélienne, et  $\psi^{-1}(\{1\})$  est l'ensemble des réseaux de  $G$  qui agissent librement transitivement sur  $\Gamma$ . En effet, supposons que  $\Lambda \subset \text{Aut}(\Gamma)$  agit librement transitivement sur  $\Gamma^{(0)}$ , alors  $\Lambda$  est un réseau. Il est aisé de voir que son action est

cocompacte, et que chaque élément de  $\Lambda$  est isolé pour la topologie de la convergence simple puisque l'image de  $v_0$  par un élément de  $\Lambda$  détermine cet élément dans  $\Lambda$ . Le champ de graphes  $\mathcal{G}$  induit un fibré standard sur  $X$  défini de la façon suivante  $\mathcal{U} := \{(x, H) : x \in X, H \in \text{Trans}(\mathcal{G}_x)\}$ . On réalise ce fibré dans  $X \times F(\mathcal{S}_\infty)$  en considérant plutôt le champ de graphes  $\widehat{\mathcal{G}}$  associé. Comme précédemment, on vérifie que l'image par  $Ad_\phi$  envoie  $\bigsqcup_{x \in X} \text{Trans}(\mathcal{G}_x)$  sur un borélien de  $X \times F(\mathcal{S}_\infty)$ , en faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{x \in X} \{H \in \text{Trans}(\mathcal{G}_x)\} & \xhookrightarrow{\{Ad_{\phi_x}\}_{x \in X}} & X \times F(\mathcal{S}_\infty) \\
 \downarrow \text{proj}_X & & \downarrow pr_1 \\
 X & \xrightarrow{Id} & X
 \end{array}$$

Enfin on considère l'application borélienne suivante :

$$\left( \begin{array}{ll} \delta : \mathcal{U} \star \mathcal{G} & \rightarrow \{0, 1\} \\ ((x, H), \mathcal{G}_x) & \mapsto \inf_{h \in H \setminus \{id\}} d_{\mathcal{G}_x}(hv_0, v_0) \end{array} \right)$$

Le projeté (dans  $X$ ) du lieu des zéros de  $\delta$  qui est un ensemble analytique (donc  $\mu$ -mesurable, cf. [Kec95], Theorem 21.10) coïncide par construction avec le lieu des zéros de  $1 - f_{\text{Cayley}}$ . Peut-on obtenir mieux ? Il faut comprendre les fibres de  $\mathcal{U} \star \mathcal{G}$ , c'est à dire l'ensemble des sous-groupes d'un graphe qui agissent librement transitivement. Sont-elles  $K_\sigma$  ?

## CHAPITRE 2

### CONSTANTES DE KAZHDAN EXPLICITES POUR $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$

#### Introduction

En 1991, Marc Burger prouve (voir [Bur91]) que la paire  $(\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$  a la propriété (T) relative dès lors que  $\Gamma$  est un sous-groupe non-moyennable de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Sa méthode consiste à montrer que pour une famille finie  $F$  d'éléments de  $SL(2, \mathbb{Z})$  (vu comme des homéomorphismes de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ), si on note

$$\alpha(F) := \inf_{\mu \in M^1} \sup_{B \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \max_{s \in F} |\mu(sB) - \mu(B)|,$$

( $M^1$  étant l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ) et si  $D$  est un domaine fondamental de  $\mathbb{R}^2$  pour l'action de  $\mathbb{Z}^2$ , alors la famille finie suivante,

$$\mathcal{F} := \{(x, \gamma) \in \mathbb{Z}^2 \times F \mid \text{Leb}((x + \gamma D) \cap D) \neq 0\}$$

est telle que pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$  sans vecteur invariant non nul,

$$\max_{(x, \gamma) \in \mathcal{F}} \|\pi((x, \gamma))\xi - \xi\| \geq [2 - 2\sqrt{1 - \alpha(F)^2}]^{\frac{1}{2}} \|\xi\|, \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

Puisque  $\alpha(F) = 0$  si et seulement si le groupe engendré par les éléments de  $F$  est un sous-groupe moyennable de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , cette inégalité prouve le théorème.

Pour prouver cette inégalité, l'auteur regarde les représentations unitaires du groupe  $SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ , et en déduit des résultats sur les représentations de  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$  par une opération d'induction. L'auteur donne une constante explicite de Kazhdan pour le groupe  $SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ , pour la famille finie

$$\mathcal{F} := \bigcup_{j \in \{-1, 0, 1\}} \left\{ \left( \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\},$$

en montrant que dans ce cas  $\alpha(\mathcal{F} \cap SL(2, \mathbb{Z})) \geq \frac{1}{4}$ , par une méthode de découpage de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  identifié à  $\mathbb{S}^1$ . Un peu plus tard en 1999, Yehuda Shalom reprend cette preuve dans [Sha99] en la modifiant légèrement, c'est à dire qu'il raisonne par l'absurde et regarde directement les représentations unitaires du groupe  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$ , et

déduit du théorème spectral et de la  $\varepsilon$ -invariance d'un vecteur  $\xi$ , la concentration de la mesure de probabilité associée sur un voisinage épointé de 0 dans  $\mathbb{T}^2 \simeq ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . En renormalisant cette dernière mesure, on obtient une nouvelle mesure de probabilité  $(\mathcal{F} \cap SL(2, \mathbb{Z}), \varepsilon')$ -quasi-invariante pour l'action linéaire de  $SL(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\varepsilon'$  aussi petit que l'on veut. En particulier, pour  $\varepsilon' < \frac{1}{4}$  on obtient la contradiction souhaitée. L'avantage de cette preuve est qu'elle est particulièrement visuelle puisque l'on regarde des découpages du plan.

L'idée sous-jacente de notre démarche est de généraliser ce découpage dans le cas d'une famille  $\mathcal{F}$  constituée de deux éléments hyperboliques  $g_1$  et  $g_2$  donnés engendrant un groupe libre. Cela nous donne naturellement des constantes de Kazhdan pour la paire  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$  dès lors que l'on a identifié une telle famille dans  $\Gamma$ , et redémontre donc le théorème de M. Burger "à la manière de" Y. Shalom. La motivation essentielle est que ces calculs sont élémentaires et s'implémentent facilement avec des logiciels de calcul. Au final, on obtient des constantes de Kazhdan explicites en fonction des vecteurs propres des matrices  $g_1, g_2$ , *i.e.* pour deux bases fixées de vecteurs propres de  $g_1, g_2$ , on donne des formules pour des entiers  $k_1, k_2$ , et pour une constante numérique de Kazhdan associée à la famille  $\{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}, (\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ .

## 2.1. Énoncés et préliminaires

**2.1.1. Rappels généraux.**— On rappelle ci-dessous l'énoncé du théorème spectral pour les représentations unitaires :

**Théorème 2.1.1.** — *Soit  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation unitaire de  $G$  groupe topologique localement compact abélien. Il existe une unique mesure régulière à valeurs dans les projecteurs de  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  notée  $E_\pi : \mathcal{B}(\hat{G}) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$ , telle que*

$$\pi(g) = \int_{\hat{G}} \overline{\hat{g}(g)} dE_\pi(\hat{g}), \forall g \in G.$$

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $\pi$  une représentation unitaire de  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$ , alors en considérant  $\pi|_{\mathbb{Z}^2}$ , on déduit du théorème 2.1.1 les propriétés suivantes satisfaites par  $E_\pi$  :

**Lemme 2.1.1.** — 1. *Pour tout vecteur unitaire  $v$ , la mesure  $\mu_v$  définie par  $\mu_v(B) := \langle E_\pi(B)v, v \rangle$  est une mesure de probabilité sur  $\hat{\mathbb{Z}}^2 \simeq \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .*

2.  *$E_\pi(\{0\})$  est la projection sur l'espace des vecteurs  $\mathbb{Z}^2$ -invariants.*

3.  *$E_\pi({}^t g B) = \pi(g)^{-1} E_\pi(B) \pi(g)$  pour tout  $g \in \Gamma$  et tout  $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$  <sup>(1)</sup>.*

---

1.  $g \in SL_2(\mathbb{Z})$  agit sur  $\hat{\mathbb{Z}}^2$  par précomposition, ce qui correspond à l'action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{T}^2$  par la transposée de l'inverse de  $g$  via l'isomorphisme canonique  $\hat{\mathbb{Z}}^2 \simeq \mathbb{T}^2$ . Ce point est discuté à nouveau en section 2.1.4.

*Démonstration.* — Les deux premiers faits sont généraux et découlent de la démonstration d'existence de  $E_\pi$ . On prouve le point 3 en remarquant que

$$\pi(gx) = \pi(g)\pi(x)\pi(g)^{-1}, \forall x \in \mathbb{Z}^2, \forall g \in \Gamma.$$

Il vient alors (avec des notations évidentes qui "cachent" l'isomorphisme  $\hat{\mathbb{Z}}^2 \simeq \mathbb{T}^2$ ) :

$$\begin{aligned} \pi(g)\pi(x)\pi(g)^{-1} &= \pi(gx) = \int_{\hat{\mathbb{Z}}^2} \overline{\hat{x}(gx)} dE_\pi(\hat{x}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \overline{({}^t g \xi)(x)} dE_\pi(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \overline{\xi(x)} ({}^t g_* dE_\pi(\xi)). \end{aligned}$$

Soit encore

$$\pi(g)^{-1} \left( \int_{\mathbb{T}^2} \overline{\xi(x)} ({}^t g_* dE_\pi(\xi)) \right) \pi(g) = \int_{\mathbb{T}^2} \overline{\xi(x)} dE_\pi(\xi), \forall x \in \mathbb{Z}^2, \forall g \in \Gamma.$$

Cette dernière égalité permet de conclure (par l'unicité de  $E_\pi$ ) que

$$E_\pi({}^t g B) = \pi(g)^{-1} E_\pi(B) \pi(g) \text{ pour tout } g \in \Gamma \text{ et tout borélien } B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^2).$$

□

**Définition 2.1.1.** — Soit  $G$  un groupe dénombrable discret, et  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation unitaire de  $G$ .

1. Soit  $Q$  une famille finie de  $G$  et  $\varepsilon > 0$ . On dira qu'un vecteur  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  est  $(Q, \varepsilon)$ -invariant si

$$\sup_{g \in Q} \| \pi(g)\xi - \xi \| < \varepsilon \| \xi \|.$$

2. La représentation  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  possède presque des vecteurs invariants si elle possède des vecteurs  $(Q, \varepsilon)$ -invariants pour toute famille finie  $Q$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ .
3. La représentation  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  possède un vecteur invariant si il existe  $\xi \neq 0$  tel que  $\pi(g)\xi = \xi, \forall g \in G$ .

**Définition 2.1.2.** — Soit  $G$  un groupe dénombrable discret,  $H$  un sous groupe de  $G$  et  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation unitaire de  $G$ . On dira que la paire  $(G, H)$  a la propriété (T) relative si pour toute représentation unitaire  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  de  $G$  qui possède presque des vecteurs invariants, il existe un vecteur invariant pour  $\pi|_H$  (appelé encore vecteur  $H$ -invariant).

De façon équivalente, on peut voir que la paire  $(G, H)$  a la propriété (T) relative si il existe une famille finie  $Q_0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour toute représentation  $\pi$  de  $G$  qui possède un vecteur  $(Q_0, \varepsilon_0)$ -invariant, il existe un vecteur  $H$ -invariant. Une telle paire  $(Q_0, \varepsilon_0)$  est appelée une *paire de Kazhdan*, le nombre  $\varepsilon_0$  est appelé *constante de Kazhdan*.

**2.1.2. Rappels sur  $SL(2, \mathbb{Z})$ .** — Si  $A$  est une matrice de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , alors son polynôme caractéristique s'écrit  $\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + 1$ .

- Si  $|\text{Tr}(A)| > 2$ ,  $A$  possède deux valeurs propres réelles distinctes. Dans ce cas, on dit que  $A$  est *hyperbolique*.  $A$  est semblable (dans  $GL(2, \mathbb{R})$ ) à la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Si  $|\text{Tr}(A)| = 2$ ,  $A$  possède une seule valeur propre réelle qui peut être  $\pm 1$ . Dans ce cas, on dit que  $A$  est *parabolique*.  $A$  est semblable (dans  $GL(2, \mathbb{R})$ ) à l'une ou l'autre des matrices  $\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ .
- Si  $|\text{Tr}(A)| < 2$ , alors  $A$  est d'ordre fini 1, 2, 3, 4 ou 6.

**2.1.3. Les énoncés.** —

**Lemme 2.1.2.** — Étant données deux matrices d'ordre infini  $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ , et si  $\langle A, B \rangle$  est le groupe engendré par  $A$  et  $B$ , alors on a les équivalences suivantes :

1.  $\langle A, B \rangle$  est non-moyennable.
2. Les vecteurs propres de  $A$  sont distincts des vecteurs propres de  $B$ . (Éventuellement un seul axe propre si  $A$  ou  $B$  est parabolique.)
3.  $\langle A, B \rangle$  contient un groupe libre non abélien.
4.  $\langle A, B \rangle$  contient un groupe libre engendré par deux éléments hyperboliques.

*Démonstration.* —  $1 \Rightarrow 2$  : Par contraposée, si les matrices  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun, alors elles sont simultanément trigonalisables. Dans ce cas,  $\langle A, B \rangle$  est résoluble, donc moyennable.

$2 \Rightarrow 3$  : Tout sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{Z})$  agit sur l'arbre de Bass-Serre de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  (en quotientant l'action "canonique" par le centre) et cette action est libre sur les arêtes (modulo un élément d'ordre 2 donc) : ainsi, tout sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{Z})$  est virtuellement libre. Supposons par exemple  $A$  hyperbolique (le cas  $B$  hyperbolique est similaire), on prouve l'implication par contraposée dans ce cas : si le groupe  $\langle A, B \rangle$  ne contient pas de groupe libre non-abélien, il est virtuellement cyclique infini. En particulier, il existe un entier



$p$  tel que  $A^p$  et  $B^p$  commutent<sup>(2)</sup>. Ainsi,  $B^p$  (donc  $B$ ) est hyperbolique et les directions propres de  $B^p$  (donc de  $B$ ) sont les mêmes que celles de  $A^p$  (donc de  $A$ ). Pour la même raison, si les matrices  $A, B$  sont paraboliques et engendrent un groupe moyennable, alors elles ont un vecteur propre commun.

Autre preuve (directe) dans ce dernier cas : si les deux éléments  $A, B$  sont paraboliques, sans vecteur propre commun, alors il existe une base de  $\mathbb{R}^2$  telle que dans cette base

$$A \simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} (\lambda, \mu > 0).$$

Il existe alors un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k\lambda > 2, k\mu > 2$ , et un lemme du ping-pong montre que  $\langle A^k, B^k \rangle$  est libre (voir par exemple [DLH00], section II.B).

3  $\Rightarrow$  4 : Cela résulte du lemme suivant qui est démontré dans [GP05] :

**Lemme 2.1.3.** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe non-moyennable de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Alors il existe deux éléments hyperboliques  $g_1, g_2 \in \Gamma$  qui engendrent un sous-groupe libre  $\mathbb{F}_2$  dans  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* — Le groupe  $\Gamma$  est non-moyennable donc il existe deux éléments  $a, b \in \Gamma$  qui engendrent un sous-groupe libre de  $\Gamma$ . En particulier,  $a, b$  sont d'ordre infini et ne commutent pas. Si  $a$  et  $b$  sont hyperboliques, c'est terminé. Dans les autres cas, on peut supposer (quitte à renommer les générateurs) que  $a$  est parabolique.

Soit  $P_a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  l'unique point fixe de  $a$ , et soit  $P_b \neq P_a$  le premier (éventuellement le seul) point fixe de  $b$  dans la partie attractive de  $P_a$ , et soit  $I$  l'intervalle (fermé) correspondant entre  $P_b$  et  $P_a$ . Ce dernier est non trivial car dans ce cas,  $a, b$  auraient un vecteur propre commun, seraient cotrigonalisables et le groupe engendré par  $a, b$  serait résoluble donc moyennable. Soit  $J$  un intervalle fermé strictement contenu dans  $I$  dont l'une des extrémités est  $P_b$ . L'intervalle  $aJ$  est contenu dans l'intérieur de  $I$ , et l'on peut supposer quitte à considérer  $b^{-1}$ , que  $P_b$  est un point attractif, de sorte que pour un entier  $k$  assez grand,  $(b^k a)J \subset \text{Int}(J)$ , ce qui caractérise l'hyperbolicité. On applique de nouveau (si besoin est) cette opération à la famille  $\{ab^k; b\}$  et l'on obtient une paire  $g_1, g_2 \in \Gamma$  qui satisfait le lemme.

□

4  $\Rightarrow$  1 : Cette dernière implication est immédiate, ce qui termine la preuve du lemme.

□

---

2. Un exercice classique montre qu'il existe en réalité un sous-groupe *distingué* d'indice fini qui est cyclique infini.

Pour  $F$  une famille finie de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , on note

$$\alpha(F) := \inf_{\mu \in M^1} \sup_{B \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \max_{s \in F} |\mu(sB) - \mu(B)|,$$

( $M^1$  étant l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ).

**Théorème 2.1.2 ([Bur91]).** — *Pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$  sans vecteur invariant non nul, et pour toute famille finie  $F$  de  $\Gamma$ ,*

$$\sup_{(\gamma, x) \in F \times \mathbb{Z}^2} \|\pi((\gamma, x))\xi - \xi\| \geq [2 - 2\sqrt{1 - \alpha(F)^2}]^{\frac{1}{2}} \|\xi\|, \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

*En particulier, si  $\Gamma \leq SL(2, \mathbb{Z})$  un sous-groupe non moyennable, alors la paire  $(\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$  a la propriété (T) relative.*

On donne ci-dessous une autre approche quantitative de la deuxième partie de ce théorème, en utilisant la méthode de découpage du plan  $\mathbb{R}^2$  initiée dans [Sha99].

**2.1.4. Conventions pour les preuves (et pour les calculs).**— On se référera constamment aux figures au cours de la preuve. Cela signifie que les axes et les notations sont comme sur les figures (il sera précisé laquelle des figures si nécessaire). Bien sûr, on peut toujours s'y ramener quitte à considérer  $g_i^{-1}$  au lieu de  $g_i$ , à condition de choisir une famille symétrique d'éléments.

On précise pour les figures que les secteurs sont ouverts à droite et fermés à gauche lorsque l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et 0 est exclu, ainsi les domaines sont-ils tous disjoints et pavent  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Sur la figure, on n'a dessiné qu'une *moitié* des domaines pour ne pas alourdir le dessin, mais chacun des domaines est invariant par la symétrie centrale  $z \mapsto -z$ .

Remarquons à ce stade la chose suivante :

Soit  $\chi \in \hat{\mathbb{Z}^2}$  un caractère. Pour un certain élément  $(x, y) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , et pour tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ , on a :

$$\chi(n, m) = e^{2i\pi \langle (x, y), (n, m) \rangle}.$$

L'action de  $g \in SL(2, \mathbb{Z})$  sur  $\hat{\mathbb{Z}^2}$  par précomposition s'écrit donc :

$$g \cdot \chi(n, m) = e^{2i\pi \langle (x, y), g^{-1}(n, m) \rangle} = e^{2i\pi \langle {}^t g^{-1}(x, y), (n, m) \rangle}, \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2,$$

et correspond à l'action sur  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  par  ${}^t g^{-1}$ . Comme on l'a déjà observé au lemme 2.1.1, c'est plutôt cette action (parce qu'elle apparaît avec le théorème spectral qui est un ingrédient majeur de la preuve) qui nous intéresse directement.

Or, les éléments  ${}^t(g_i)$ ,  $i = 1, 2$  (et leurs inverses) n'appartiennent pas nécessairement à  $\Gamma$ ; cependant, ils ont la même dynamique que  $g_i$ , i.e. les éléments  ${}^t g_i$  sont hyperboliques, leurs valeurs propres sont les mêmes que celles des éléments  $g_i$ , la disposition transverse ou non de leurs axes propres est la même que celle de  $g_1, g_2$  (les axes propres de  ${}^t g_i$  sont respectivement orthogonaux aux axes propres de  $g_i$ ), et les entiers  $k_i$  correspondants sont les mêmes (voir ci-dessous pour la définition de "transverse").

Pour ne pas alourdir les notations, on regarde la dynamique de  $g_1, g_2$  sur  $\mathbb{R}^2$  pour l'action linéaire *canonique*, puisque cela n'a aucune influence sur les calculs, mais on gardera en tête que c'est la dynamique des éléments  ${}^t(g_i), i = 1, 2$  (et leurs inverses) qui nous intéresse directement. À titre indicatif, lorsque l'on écrit le borélien  $gB$  au lemme 2.2.2 (et au lemme 2.2.3 qui le suit), on sous-entend naturellement  ${}^tgB$  comme au lemme 2.1.1.

## 2.2. Démonstration "à la Shalom" du théorème de M. Burger

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe non-moyennable de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Par le lemme 2.1.3 ci-dessus, il existe deux éléments hyperboliques de  $\Gamma$  qui engendrent un groupe libre. Soient donc  $g_1, g_2$  deux éléments de  $\Gamma$  hyperboliques qui n'ont pas de vecteur propre commun (cf. lemme 2.1.2). On note  $P_{g_i}^+$  (resp.  $P_{g_i}^-$ ) le point attractif (resp. répulsif) de  $g_i$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Il y a deux configurations différentes à conjugaison de  $\Gamma$  dans  $SL(2, \mathbb{Z})$  près :

- (i) le cas transverse, lorsque les segments  $[P_{g_1}^+, P_{g_1}^-]$  et  $[P_{g_2}^+, P_{g_2}^-]$  s'intersectent (voir figure 1)
- (ii) le cas non-transverse, lorsque les segments  $[P_{g_1}^+, P_{g_1}^-]$  et  $[P_{g_2}^+, P_{g_2}^-]$  ne s'intersectent pas. (voir figure 2). Dans ce cas, quitte à changer  $g_2$  en  $g_2^{-1}$ , on peut supposer que la configuration est précisément celle de la figure 2.

Les deux cas se démontrent de la même façon :

Dans le cas transverse, soient  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $g_i^{k_i}(A_i \cup B_i) \subset C_i$ . (Dans le cas non transverse, on considère seulement deux zones  $A_1, A_2$  [voir figure 2] et les entiers  $k_1, k_2$  sont tels que  $g_i^{k_i}(A_i) \subset C_i, i = 1, 2$ .)

On note  $\lambda_i$  la valeur propre de module  $> 1$  de  $g_i$  et encore

$$\eta_0 := \max(|\lambda_1^{k_1}|, |\lambda_2^{k_2}|).$$

On pose  $\alpha^\pm := (\pm 1, 0), \beta^\pm := (0, \pm 1)$ , les générateurs de  $\mathbb{Z}^2 \subset \Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$ .

Fixons désormais un certain  $\eta \geq \eta_0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que

$$0 < \frac{2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}}{1 - 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}} < \frac{1}{2}, \quad (\text{où } \eta' := 4 \sin^2(\frac{\pi}{2\eta})).$$

Posons  $\mathcal{F} := \{\alpha^\pm; \beta^\pm; g_1^{\pm k_1}; g_2^{\pm k_2}\}$ . Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2$  sans vecteur  $\mathbb{Z}^2$ -invariant non-nul. Supposons par l'absurde que  $\pi$  possède un vecteur unitaire  $v$  qui est  $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ -invariant.

Par le théorème spectral, on dispose donc de  $\mu_v$  mesure de probabilité supportée sur  $\mathbb{T}^2 \setminus \{0\}$  définie par

$$(11) \quad \forall B \subset \mathcal{B}(\mathbb{T}^2), \mu_v(B) := \langle E_\pi(B)v, v \rangle.$$

Notons enfin  $X := ]-\frac{1}{2\eta}, \frac{1}{2\eta}[^2$ . La presque-invariance de  $v$  par rapport aux éléments générateurs de  $\mathbb{Z}^2$  implique la concentration de la mesure  $\mu_v$  associée sur un voisinage de l'origine, c'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 2.2.1.** —

$$\mu_v(X) \geq 1 - \frac{2\varepsilon^2}{\eta'}.$$

*Démonstration.* —

$$\begin{aligned} & \| \pi(\alpha^\pm)v - v \|^2 = \\ & \langle \pi(\alpha^\pm)v - v, \pi(\alpha^\pm)v - v \rangle = 2 - 2\Re(\langle \pi(\alpha^\pm)v, v \rangle) \\ & = 2[1 - \Re(\int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} e^{\pm 2i\pi x} d\mu_v(x, y))] \\ & = \int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} (2 - 2\Re(e^{\pm 2i\pi x})) d\mu_v(x, y) \\ & = \int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} |e^{\pm 2i\pi x} - 1|^2 d\mu_v(x, y) \end{aligned}$$

donc on a

$$\int_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} |e^{\pm 2i\pi x} - 1|^2 d\mu_v(x, y) = \| \pi(\alpha^\pm)v - v \|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Or, pour  $|x| \geq \frac{1}{2\eta}$ , on a

$$\eta' = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\eta}\right) \leq 4 \sin^2(\pi x) = |e^{\pm 2i\pi x} - 1|^2.$$

Il s'ensuit

$$\mu_v\left(\left\{(x, y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \mid |x| \geq \frac{1}{2\eta}\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{\eta'}.$$

Idem avec  $\beta^\pm$ , il vient  $\mu_v\left(\left\{(x, y) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \mid |y| \geq \frac{1}{2\eta}\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon^2}{\eta'}$ , d'où la proposition. □

On utilise maintenant le fait 3 du lemme 2.1.1 et la quasi-invariance de  $v$  par les éléments de  $SL(2, \mathbb{Z})$  dans  $\mathcal{F}$  pour montrer la quasi-invariance de la mesure  $\mu_v$  associée. On identifie désormais mesurablement  $\mathbb{T}^2$  et  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**Lemme 2.2.2.** — Pour toute partie borélienne  $B$  de  $\mathbb{T}^2 \simeq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ , et pour tout  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$ , on a

$$|\mu_v(gB) - \mu_v(B)| < 2\varepsilon.$$

*Démonstration.* — Le borélien  $gB$  dans ce qui suit est vu comme un sous ensemble borélien de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  après notre identification  $\mathbb{T}^2 \simeq ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ .

$$\begin{aligned}
|\mu_v(gB) - \mu_v(B)| &= | \langle \pi(g^{-1})E_\pi(B)\pi(g)v, v \rangle - \langle E_\pi(B)v, v \rangle | \\
&\leq | \langle \pi(g^{-1})E_\pi(B)\pi(g)v, v \rangle - \langle \pi(g^{-1})E_\pi(B)v, v \rangle | \\
&\quad + | \langle \pi(g^{-1})E_\pi(B)v, v \rangle - \langle E_\pi(B)v, v \rangle | \\
&\leq | \langle \pi(g^{-1})E_\pi(B)(\pi(g)v - v), v \rangle | + | \langle E_\pi(B)v, \pi(g)v - v \rangle | \\
&\leq 2 \| \pi(g)v - v \| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Considérons désormais la mesure  $\mu$  définie par

$$\mu(B) := \mu_v(B \cap X) \text{ sur } ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2.$$

Par le lemme 2.2.1, pour tout borélien  $B$  de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  on a

$$0 \leq \mu_v(B) - \mu(B) \leq \frac{2\varepsilon^2}{\eta'}.$$

Soit  $B$  un borélien de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  et  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$  :

$$\begin{aligned}
\mu(gB) - \mu(B) &= (\mu(gB) - \mu_v(gB)) + (\mu_v(gB) - \mu_v(B)) + (\mu_v(B) - \mu(B)) \\
&\leq 0 + 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{\eta'}.
\end{aligned}$$

Cela étant également vrai pour le borélien  $B' = gB$ , en substituant  $g^{-1}$  à  $g$ , on obtient finalement

$$|\mu(gB) - \mu(B)| < 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{\eta'}.$$

On normalise par  $\nu := \mu/\mu(X)$ . La mesure  $\nu$  est une mesure de probabilité supportée sur  $X \setminus \{0\}$  (tout comme  $\mu_v$  et  $\mu$ , voir la définition de  $\mu_v$  en (11)), et pour  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$ , pour tout borélien  $B \subset ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  :

$$(12) \quad |\nu(gB) - \nu(B)| \leq \frac{2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}}{1 - 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}} < \frac{1}{2},$$

par hypothèse sur  $\varepsilon$ .

On prolonge la mesure  $\nu$  en une mesure de probabilité  $\tilde{\nu}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  de la façon suivante : pour tout  $B$  borélien de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , on pose  $\tilde{\nu}(B) = \nu(B \cap X)$ .

Maintenant, on remarque que pour tout  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$ , on a  $gX \subset ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  pour l'action linéaire canonique de  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$  (la valeur de  $\eta$  a été choisie pour cela).

Il s'ensuit pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et tout  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(B) - \tilde{\nu}(gB) &= \nu(B \cap X) - \nu(gB \cap X) \\ &\leq \nu(B \cap X) - \nu(gB \cap gX) \text{ (car } \nu \text{ est supportée sur } X) \\ &\leq \nu(B \cap X) - \nu(g(B \cap X)) \text{ (car } g(B \cap X) \subset gB \cap gX) \\ &< \frac{1}{2} \text{ (c'est le point (12) appliqué à } \underbrace{g(B \cap X)}_{\in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} \text{ et } g^{-1}). \end{aligned}$$

La même inégalité avec le borélien  $gB$  et  $g \leftrightarrow g^{-1}$  donne finalement

$$|\tilde{\nu}(B) - \tilde{\nu}(gB)| < \frac{1}{2},$$

pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et tout  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$ . On obtient une contradiction grâce au lemme suivant (ce qui termine la preuve de la deuxième partie du théorème 2.1.2) :

**Lemme 2.2.3.** — *Soit  $\nu$  une mesure de probabilité définie sur les boréliens de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Alors il existe un borélien  $Y \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $g \in \{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}\}$  tel que*

$$|\nu(gY) - \nu(Y)| \geq \frac{1}{2}.$$

*Démonstration.* — On suppose dans un premier temps que l'on est dans le cas transverse (et les éléments  $g_1, g_2$  disposés comme sur la figure 1). On raisonne par l'absurde en se donnant une mesure  $\nu$  qui contredit l'énoncé. On a par hypothèse :

$$g_i^{k_i}((A_i \cup C_i) \cup (B_i \cup C_i)) \subset C_i, i = 1, 2.$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \nu((A_i \cup C_i) \cup (B_i \cup C_i)) - \frac{1}{2} &< \nu(g_i^{k_i}((A_i \cup C_i) \cup (B_i \cup C_i))) \\ &< \nu(C_i) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\nu(A_i \cup B_i) < \frac{1}{2}, i = 1, 2$ . Cependant,  $A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ce qui donne la contradiction souhaitée.

Idem, dans le cas non transverse (voir la figure 2), on a par hypothèse :

$$g_i^{k_i}(A_i \cup C_i) \subset C_i, i = 1, 2.$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \nu(A_i \cup C_i) - \frac{1}{2} &< \nu(g_i^{k_i}(A_i \cup C_i)) \\ &< \nu(C_i) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\nu(A_i) < \frac{1}{2}$ , pour  $i = 1, 2$ . Cependant,  $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ce qui donne la contradiction souhaitée dans ce cas.  $\square$

**Remarque 2.2.1.** — On a pris des bissectrices dans la preuve pour définir les secteurs du plan adéquats (voir les figures 1 et 2), mais n'importe quel quadruplet de droites dans le bon domaine<sup>(3)</sup> aurait fait l'affaire.

### 2.3. Calcul des constantes

La preuve précédente nous donne une manière d'obtenir des constantes de Kazhdan explicites pour la paire  $(\Gamma \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$  en fonction des éléments (hyperboliques)  $g_1, g_2$  choisis. C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** — Soient  $g_1, g_2$  deux matrices hyperboliques de  $SL(2, \mathbb{Z})$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de module  $> 1$  associées respectivement. On note  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  la matrice de passage d'une base de vecteurs propres pour  $g_1$  à une base de vecteurs propres pour  $g_2$ , et  $P := abcd$ ,  $\phi(x) := \frac{x}{8}(-3 + \sqrt{9 + \frac{8}{x}})$  (pour  $x > 0$ ),  $M = \max(\frac{ad}{bc}, \frac{bc}{ad})$ , et  $m = \max((2bc - ad)^2, (2ad - bc)^2)$ . Alors on a les alternatives suivantes :

1.  $g_1, g_2$  sont co-trigonalisables si et seulement si  $P = 0$ .

2.  $P > 0$  : On est dans le cas non-transverse et il existe  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\phi\left(4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\max(\lambda_1^2 \frac{m}{P}, 4\lambda_2^2 M)}}\right)\right)$$

est une constante de Kazhdan pour la famille  $\{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}, (\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ .

3.  $P < 0$  : On est dans le cas transverse et il existe  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\phi\left(4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\max(\lambda_1^2(1 + 2\frac{(ad-bc)^2}{-P}), 4\lambda_2^2)}}\right)\right),$$

est une constante de Kazhdan pour la famille  $\{g_1^{\pm k_1}, g_2^{\pm k_2}, (\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ .

**Remarque 2.3.1.** — Les entiers  $k_1, k_2$  évoqués dans le théorème ne sont pas "mystérieux", ils sont (aussi) calculables explicitement, ainsi que l'on le vérifiera dans le déroulement de la preuve. Par ailleurs, l'écriture des constantes numériques de l'énoncé ci-dessus nécessite leur connaissance.

**Remarque 2.3.2.** — Les expressions des constantes numériques sont invariantes si l'on remplace  $A$  par  $A^{-1}$ .

---

3. On entend par là considérer n'importe quel quadruplet de droites  $d_i$  dans les mêmes secteurs (ouverts) du plan que les bissectrices de la figure.

On a d'abord besoin de quelques notations. Cette fois, les deux cas (transverse et non-transverse) se traitent distinctement. On supposera dans un premier temps que l'on est dans le cas transverse (voir figure 4).

Dans la suite,  $\{e_{X'}, e_{Y'}\}$  (resp.  $\{e_X, e_Y\}$ ) est une base de vecteurs propres de  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) disposés comme sur la figure 4 (resp. figure 5), et  $A$  est la matrice de passage de la base  $(e_X, e_Y)$  à la base  $(e_{X'}, e_{Y'})$ .

$$\begin{aligned} \text{Dans le repère } (e_X, e_Y) : \quad Y &= \alpha_i X \quad \text{pour } d_i (i = 1 \cdots 4) \\ \text{Dans le repère } (e_{X'}, e_{Y'}) : \quad Y' &= \alpha'_i X' \quad \text{pour } d_i (i = 1 \cdots 4) \end{aligned}$$

- On note  $\omega_{X'}$  (resp.  $\omega_{Y'}$ ) le coefficient directeur de l'axe des  $X'$  (resp.  $Y'$ ) dans le repère  $(e_X, e_Y)$ .
- On note  $\omega_X$  (resp.  $\omega_Y$ ) le coefficient directeur de l'axe des  $X$  (resp.  $Y$ ) dans le repère  $(e_{X'}, e_{Y'})$ .

Si on note  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  la matrice de passage de la base  $(e_{X'}, e_{Y'})$  à la base  $(e_X, e_Y)$  (i.e. comme dans l'énoncé du théorème 2.3.1), de sorte que

$$\begin{cases} e_X = ae_{X'} + ce_{Y'} \\ e_Y = be_{X'} + de_{Y'} \end{cases}$$

alors on a :

$$\omega_X = \frac{c}{a}; \omega_Y = \frac{d}{b}; \omega_{X'} = \frac{-c}{d}; \omega_{Y'} = \frac{a}{-b}.$$

et

$$\alpha'_i = \frac{c + \alpha_i d}{a + \alpha_i b}, \forall i \leq 4.$$

**Remarque 2.3.3.** — L'ordre des bases n'a pas d'importance pour la matrice de passage : on rappelle que le calcul d'une constante numérique de Kazhdan se fait par rapport à la famille symétrique  $\mathcal{F} = \{g_1^{\pm k_1}; g_2^{\pm k_2}\}$ . Ainsi, quitte à changer  $g_i$  en  $g_i^{-1}$ , on peut supposer que l'axe des ordonnées  $Y'$  (resp.  $Y$ ) est associé au point attractif de  $g_1$  (resp.  $g_2$ ), c'est à dire que c'est l'axe propre associé à la valeur propre de module  $> 1$ .

Cependant, lorsque l'on a supposé que les vecteurs de base  $\{e_X, e_Y\}$  et  $\{e_{X'}, e_{Y'}\}$  étaient disposés comme dans la figure 4, on a fait un choix particulier : il y a en réalité trois autres configurations possibles en intervertissant  $e_X$  et  $e_Y$  (resp.  $e_{X'}$  et  $e_{Y'}$ ). Les calculs sont tout à fait similaires dans ces cas là, mais les constantes obtenues en fonction de  $a, b, c, d$  peuvent être différentes puisqu'on permute les rôles de  $a, b, c, d$  dans ces cas. Cela sera pris en compte dans le résultat final.

Si on note  $\lambda_i$  la valeur propre de  $g_i$  de module  $> 1$ , alors un calcul simple montre que les entiers suivants conviennent (ils sont même minimaux pour les secteurs fixés



une fois choisies les droites  $d_i$ ). On désigne par  $[\cdot]$  la fonction "*partie entière*" :

$$k_1 = \max \left( \left\lfloor \frac{\log(\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2})}{2 \log(|\lambda_1|)} \right\rfloor + 1; \left\lfloor \frac{\log(\frac{\alpha'_4}{\alpha'_1})}{2 \log(|\lambda_1|)} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$k_2 = \max \left( \left\lfloor \frac{\log(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})}{2 \log(|\lambda_2|)} \right\rfloor + 1; \left\lfloor \frac{\log(\frac{\alpha_3}{\alpha_4})}{2 \log(|\lambda_2|)} \right\rfloor + 1 \right)$$

On peut alors choisir les constantes suivantes

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \omega_{X'} = \frac{-c}{2d}$$

$$\alpha_2 = 2 \omega_{X'} = \frac{-2c}{d}$$

$$\alpha_3 = 2 \omega_{Y'} = \frac{2a}{-b}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \omega_{Y'} = \frac{a}{-2b}$$

$$\eta = \max \left( |\lambda_1| \sqrt{\frac{\alpha'_4}{\alpha'_1}}, |\lambda_1| \sqrt{\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}}, |\lambda_2| \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, |\lambda_2| \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} \right)$$

$$\eta' = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2\eta} \right).$$

Enfin, il suffit de prendre  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < \frac{2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}}{1 - 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}} < \frac{1}{2}$ . Par exemple, en choisissant la solution positive de  $\frac{2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}}{1 - 2\frac{\varepsilon^2}{\eta'}} = \frac{1}{3}$ , soit  $\varepsilon = \frac{\eta'}{8}(-3 + \sqrt{9 + \frac{8}{\eta'}})$ .

Le calcul explicite de  $\alpha'_i, i = 1..4$  donne

$$\frac{\alpha'_4}{\alpha'_1} = \frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} = \frac{(2ad - bc)(2bc - ad)}{abcd} = 1 - 2 \frac{(ad - bc)^2}{abcd} > 0$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = 4.$$

**Remarque 2.3.4.** — *L'invariance de la constante  $\eta$  par les interversions*

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

montre que les constantes obtenues en fonction de  $a, b, c, d$  seront les mêmes dans les autres configurations transverses.

Dans le cas non-transverse (*cf.* figure 5), nous n'avons qu'à considérer deux droites pour obtenir la contradiction dans la preuve précédente. Comme précédemment, il y a trois autres configurations possibles en intervertissant  $e_X$  et  $e_Y$  (resp.  $e_{X'}$  et  $e_{Y'}$ ) sur la figure 5 qui mènent à des constantes différentes. On en tiendra compte dans le résultat final. Dans la disposition de la figure 5, on peut choisir les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}\omega_{Y'} = \frac{a}{-2b} \\ \alpha_2 &= 2\omega_{X'} = 2\frac{-c}{d} \\ \eta &= \max \left( |\lambda_1| \sqrt{\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}}, |\lambda_2| \sqrt{\frac{\alpha'_2}{\alpha'_1}} \right) \\ \eta' &= 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2\eta} \right).\end{aligned}$$

Enfin, on choisit  $\varepsilon$  comme ci-dessus. Le calcul explicite de  $\alpha'_i, i = 1, 2$  donne

$$\begin{aligned}\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} &= \frac{(2bc - ad)^2}{abcd} > 0 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= 4 \frac{bc}{ad} > 0.\end{aligned}$$

Dans certaines des configurations non-transverses "*cachées*" (dont on ne re-développe pas les calculs ici) on obtient

$$\eta = \max \left( |\lambda_1| \sqrt{\frac{(2ad - bc)^2}{abcd}}, |\lambda_2| \sqrt{4 \frac{ad}{bc}} \right),$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.3.1.

### 2.3.1. Remarques. —

- (i) Puisqu'on a une liberté sur les paramètres  $\alpha_i$  ; il peut être intéressant de minimiser  $\eta$  pour maximiser  $\varepsilon$ . Cela donne lieu (dans le cas transverse) au problème de minimisation suivant :

Minimiser la fonctionnelle  $\Psi$  définie sur le pavé ouvert  $\Omega := ]0, \omega_{X'}[ \times ]\omega_{X'}, +\infty[ \times ]-\infty, \omega_{Y'}[ \times ]\omega_{Y'}, 0[ \subset \mathbb{R}^4$  par

$$\begin{aligned}\Psi((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)) &:= \max \left( \left[ \frac{\log(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})}{2 \log(|\lambda_2|)} \right] \log(|\lambda_2|), \left[ \frac{\log(\frac{\alpha_3}{\alpha_4})}{2 \log(|\lambda_2|)} \right] \log(|\lambda_2|), \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{\log(\frac{\alpha'_3}{\alpha'_4})}{2 \log(|\lambda_1|)} \right] \log(|\lambda_1|), \left[ \frac{\log(\frac{\alpha'_4}{\alpha'_1})}{2 \log(|\lambda_1|)} \right] \log(|\lambda_1|) \right)\end{aligned}$$

- (ii) On montre facilement, que  $\Psi$  atteint un minimum sur  $\Omega$ , mais le problème de minimisation n'est pas immédiat. L'intérêt pour un tel problème se situe au niveau de l'optimisation des constantes de Kazhdan, mais rien n'assure que cette méthode fournirait des constantes optimales.
- (iii) Dans le cas où les deux éléments sont paraboliques et n'ont pas d'axe propre commun (*cf.* figure 3), la démonstration est un peu plus facile, car il existe alors  $g \in GL(2, \mathbb{R})$  tel que  $gg_1g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $gg_2g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Le *découpage* du plan considéré ne comprend que 4 zones et non 6 comme dans le cas hyperbolique, et l'on renvoie à [Sha99]. Cependant, il existe des sous-groupes de  $SL(2, \mathbb{Z})$  constitués seulement d'éléments hyperboliques, ce qui justifie notre démarche.



# FIGURES

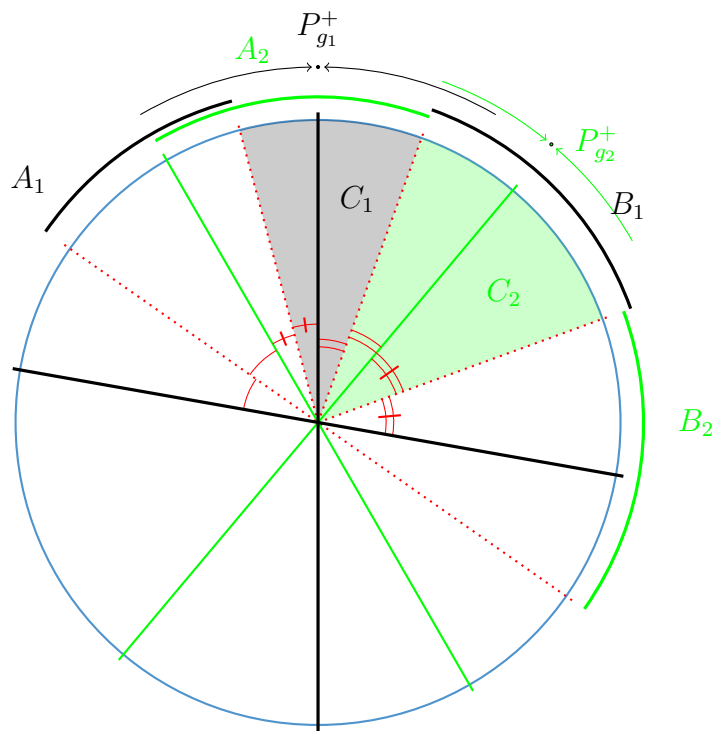


FIGURE 1. Le cas transverse

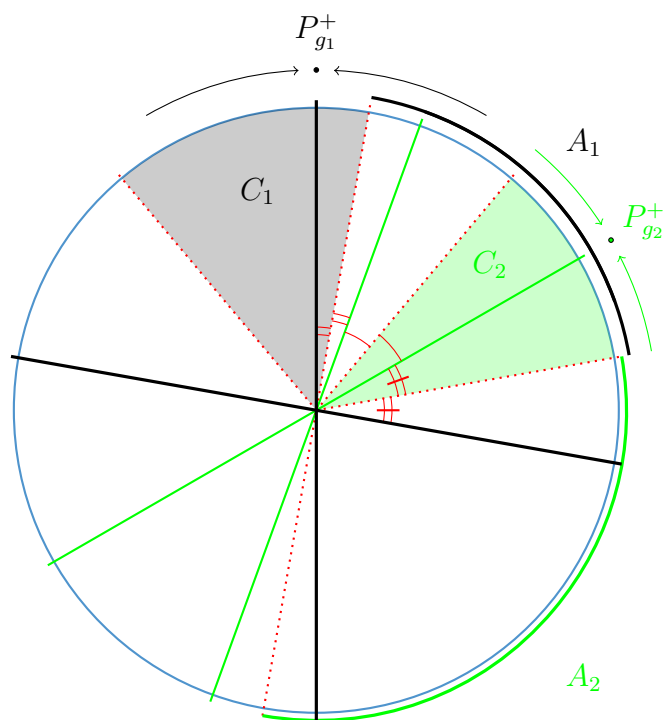


FIGURE 2. Le cas non-transverse

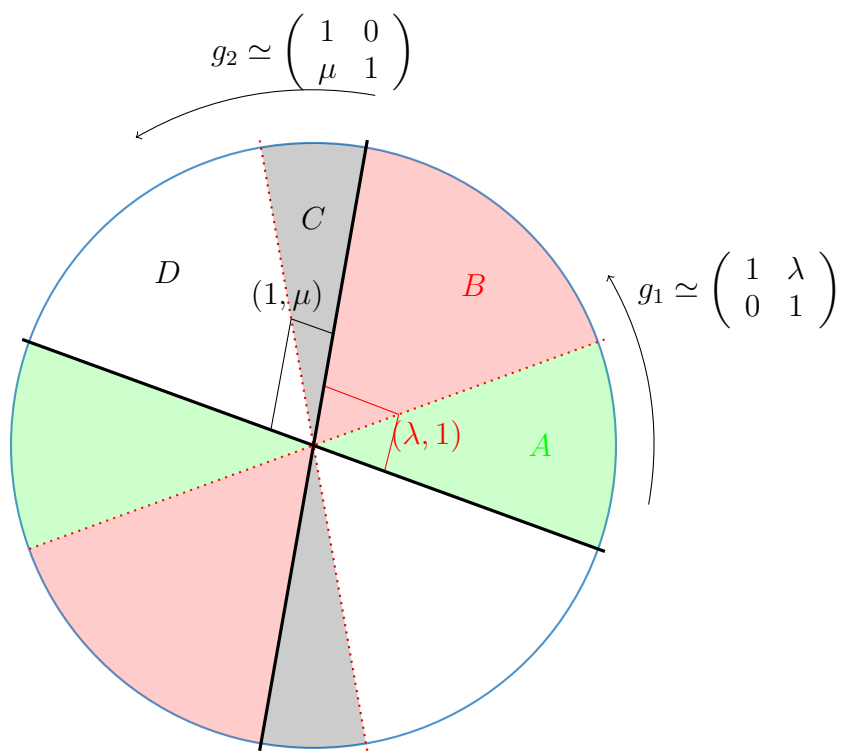


FIGURE 3. Le cas parabolique

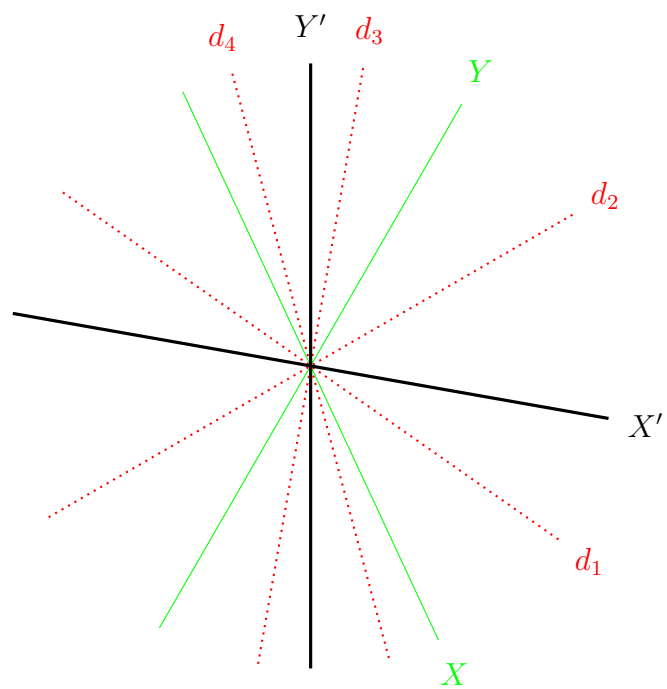


FIGURE 4. Notations pour le calcul (cas transverse).



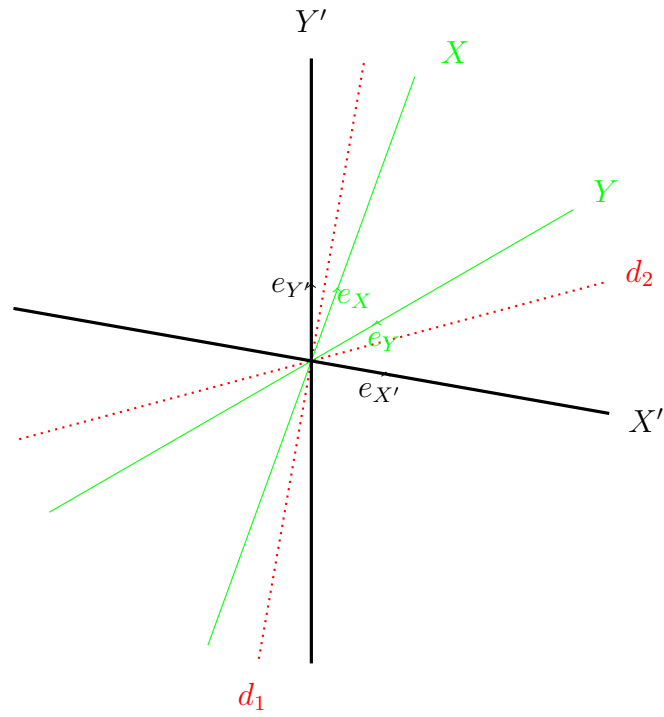


FIGURE 5. Notations pour le calcul (cas non-transverse).



## DÉTAILS DU PROGRAMME

On présente ici un exemple de programmation en Maple qui prend en entrée deux matrices (déjà supposées hyperboliques)  $A$  et  $B$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et rend une "constante de Kazhdan" pour le groupe  $\langle A, B \rangle \rtimes \mathbb{Z}^2$ , c'est à dire une constante numérique et les deux entiers  $n, m$  associés respectivement aux matrices  $A$  et  $B$  (voir l'énoncé du théorème 2.3.1).

```
Libre := proc( $A, B$ ); local  $v, E, w, F, P, M$ ;  
  ( $v, E$ ) := Eigenvectors( $A$ );  
  ( $w, F$ ) := Eigenvectors( $B$ );  
   $M$  := MatrixInverse( $E$ );  
   $P$  :=  $M.F$ ;  
  if ( $P[1, 1] = 0$ ) or ( $P[1, 2] = 0$ ) or ( $P[2, 1] = 0$ ) or ( $P[2, 2] = 0$ )  
    then return 'moyennable' else return 'non-moyennable'  
  fi;  
end proc;
```

```
Transverse := proc( $A, B$ ); local  $v, w, E, F$ ;  
 $v, E$  := Eigenvectors( $A$ );  
 $w, F$  := Eigenvectors( $B$ );  
  if (evalf((Column( $E, 1$ ).Column( $F, 1$ )).(Column( $E, 2$ ).Column( $F, 1$ ))) < 0)  
    or (evalf((Column( $E, 1$ ).Column( $F, 2$ )).(Column( $E, 2$ ).Column( $F, 2$ ))) < 0)  
  then  
    return 'true';  
  else return 'false';  
  fi;  
end proc;
```

```

Kazhdan := proc(A, B) global P, x, y, z, t, E, F, M, v, w, d, p;
if (Libre(A, B) = 'moyennable') then return 'le groupe G est moyennable';
else
  (v, E) := Eigenvectors(A);
  (w, F) := Eigenvectors(B);
  M := MatrixInverse(E);
  P := M.F;
fi;
if (Transverse(A, B)) then
   $\rho := 2 \cdot \max(\text{abs}(v[1]), \text{abs}(v[2]), \text{abs}(w[1]), \text{abs}(w[4]));$ 
   $p := P[1, 1].P[1, 2].P[2, 1].P[2, 2];$ 
   $d := P[1, 1].P[2, 2] - P[2, 1].P[1, 2];$ 
   $\eta := 4 \left( \sin \left( \frac{Pi}{\rho \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{d^2}{p}}} \right) \right)^2;$ 

   $n := \max \left( \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(1 - 2 \frac{d^2}{p})}{2 \log(|v[1]|)} \right| \right), \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(2)}{\log(|v[1]|)} \right| \right) \right);$ 
   $m := \max \left( \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(1 - 2 \frac{d^2}{p})}{2 \log(|w[1]|)} \right| \right), \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(2)}{\log(|w[1]|)} \right| \right) \right);$ 
fi;

  return [evalf ( $\frac{\eta}{8} \cdot (-3 + \sqrt{9 + \frac{8}{\eta}})$ ), n, m];

if (not Transverse(A, B)) then
   $N := \max \left( \frac{P[1, 1].P[2, 2]}{P[1, 2].P[2, 1]}, \frac{P[1, 2].P[2, 1]}{P[1, 1].P[2, 2]} \right);$ 
   $L := \max \left( (2.P[1, 1].P[2, 2] - P[1, 2].P[2, 1])^2, (2.P[1, 2].P[2, 1] - P[1, 1].P[2, 2])^2 \right);$ 
   $\rho := \max(|v[1]|, |v[2]|, |w[1]|, |w[2]|);$ 
   $\eta := 2\rho \cdot \sqrt{\max(\frac{L}{p}, N)};$ 
   $\eta' := 4 \sin^2 \left( \frac{Pi}{2\eta} \right);$ 
   $n := \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(\max(\frac{L}{p}, N))}{2 \log(|v[1]|)} \right| \right);$ 
   $m := \text{ceil} \left( \left| \frac{\log(\max(\frac{L}{p}, N))}{2 \log(|w[1]|)} \right| \right);$ 
fi;

  return [evalf ( $\frac{\eta'}{8} \cdot (-3 + \sqrt{9 + \frac{8}{\eta'}}$ ), n, m];
end proc;

```

## BIBLIOGRAPHIE

- [AD11] Claire Anantharaman-Delaroche. Old and new about treeability and the Haagerup property for measured groupoids. 05 2011.
- [Ada88a] S. Adams. An equivalence relation that is not freely generated. *Proceedings of American Mathematical Society*, 102 :565–566, 1988.
- [Ada88b] S. Adams. Indecomposability of treed equivalence relations. *Israel Journal of Mathematics*, 64(3) :362–380, 1988.
- [Ada90] S. Adams. Trees and amenable equivalence relations. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 10(1) :1–14, 1990.
- [ADR00] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids*. Number 36. L’Enseignement Mathématique, 2000.
- [BdLHV08] B. Bekka, P. de La Harpe, and A. Valette. *Kazhdan’s property (T)*, volume 11. Cambridge Univ Pr, 2008.
- [BMST88] N.L. Biggs, B. Mohar, and J. Shawe-Taylor. The spectral radius of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc*, 20 :116–120, 1988.
- [Bur91] M. Burger. Kazhdan constants for  $SL(3, \mathbb{Z})$ . *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1991(413) :36–67, 1991.
- [BV93] B. Bekka and A. Valette. Kazhdan’s property (T) and amenable representations. *Mathematische Zeitschrift*, 212(1) :293–299, 1993.
- [CCJ<sup>+</sup>01] P.A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette. *Groups with the Haagerup Property : Gromov’s  $a$ -(T)-menability*, volume 197. Birkhauser, 2001.
- [CK10] C.T. Conley and A.S. Kechris. Measurable chromatic and independence numbers for ergodic graphs and group actions. *preprint*, 2010.

- [Con79] Alain Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration, 1979.
- [dLH00] P. de La Harpe. *Topics in geometric group theory*. University of Chicago Press, 2000.
- [Dye59] H.A. Dye. On groups of measure preserving transformations. i. *American Journal of Mathematics*, 81(1) :119–159, 1959.
- [Dye63] H.A. Dye. On groups of measure preserving transformations. ii. *American Journal of Mathematics*, 85(4) :551–576, 1963.
- [Eps07] I. Epstein. Orbit inequivalent actions of non-amenable groups. *Arxiv preprint arXiv :0707.4215*, 2007.
- [FM77] J. Feldman and C.C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. i. *Transactions of the American mathematical society*, 234(2) :289–324, 1977.
- [Fur99a] A. Furman. Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices. *Annals of Mathematics-Second Series*, 150(3) :1059–1082, 1999.
- [Fur99b] A. Furman. Orbit equivalence rigidity. *Annals of Mathematics-Second Series*, 150(3) :1083–1108, 1999.
- [Fur09] A. Furman. A survey of measured group theory. *Arxiv preprint arXiv :0901.0678*, 2009.
- [Gab00] Damien Gaboriau. Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, 139(1) :41–98, 2000.
- [Gab05] D. Gaboriau. Invariant percolation and harmonic Dirichlet functions. *Geometric and Functional Analysis*, 15(5) :1004–1051, 2005.
- [Ghy95] É. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *The Annals of Mathematics*, 141(2) :387–422, 1995.
- [GL09] D. Gaboriau and R. Lyons. A measurable-group-theoretic solution to von Neumann's problem. *Inventiones Mathematicae*, 177(3) :533–540, 2009.
- [GP05] D. Gaboriau and S. Popa. An uncountable family of nonorbit equivalent actions of  $\mathbb{F}_n$ . *Journal of the American Mathematical Society*, 18(3) :547, 2005.

- [Hjo06] G. Hjorth. A lemma for cost attained. *Annals of Pure and Applied Logic*, 143(1-3) :87–102, 2006.
- [Ioa11] A. Ioana. Orbit inequivalent actions for groups containing a copy of  $\mathbb{F}_2$ . *Inventiones Mathematicae*, 185(1) :55–73, 2011.
- [Jaj00] R. Jajcay. The structure of automorphism groups of Cayley graphs and maps. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 12(1) :73–84, 2000.
- [Jol05] P. Jolissaint. The Haagerup property for measure-preserving standard equivalence relations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(01) :161–174, 2005.
- [Kai97] V.A. Kaimanovich. Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(9) :999–1004, 1997.
- [Kaz67] D.A. Kazhdan. Connection of the dual space of a group with the structure of its close subgroups. *Functional analysis and its applications*, 1(1) :63–65, 1967.
- [Kec95] A.S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer, 1995.
- [Kec10] A.S. Kechris. *Global aspects of ergodic group actions*. Number 160. Amer Mathematical Society, 2010.
- [KM04] A.S. Kechris and B.D. Miller. *Topics in orbit equivalence*. Springer Verlag, 2004.
- [Lac88] M. Laczkovich. Closed sets without measurable matching. In *Proc. Amer. Math. Soc*, volume 103, pages 894–896, 1988.
- [Lev95] G. Levitt. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(6) :1173–1182, 1995.
- [LN09] Russell Lyons and Fedor Nazarov. Perfect matchings as iid factors on non-amenable groups. *Europ. J. Combin.* 32 (2011), 1115–1125, 11 2009.
- [MN36] F.J. Murray and J. Neumann. On rings of operators. *The Annals of Mathematics*, 37(1) :116–229, 1936.
- [Mon06] N. Monod. An invitation to bounded cohomology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Madrid, August 22-30, 2006 : invited lectures*, pages 1183–1212, 2006.

- [OW80] D.S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. i. the Rokhlin lemma. *Bull. Amer. Math. Soc.(N. S.)* 2, 1980.
- [Pau99] F. Paulin. Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, 5(2) :163–200, 1999.
- [Sha99] Y. Shalom. Bounded generation and Kazhdan's property (T). *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 90(1) :145–168, 1999.
- [SW90] P.M. Soardi and W. Woess. Amenability, unimodularity, and the spectral radius of random walks on infinite graphs. *Mathematische Zeitschrift*, 205(1) :471–486, 1990.
- [Zim78] R.J. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *Journal of Functional Analysis*, 27(3) :350–372, 1978.
- [Zim80] R.J. Zimmer. Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups. *The Annals of Mathematics*, 112(3) :511–529, 1980.
- [Zim81] R.J. Zimmer. On the cohomology of ergodic actions of semisimple Lie groups and discrete subgroups. *American Journal of Mathematics*, 103(5) :937–951, 1981.
- [Zim84] R.J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser, 1984.